Soustavy lineárních rovnic

1. **Spočítejte v C (komplexních číslech): -(4+3i), (4+3i) + (2-i), (4+3i) . (2-i), $(4+3i)^{-1}$, $(4+3i)^{-1}(2-i)$.**

   (4+3i) + (2-i) = (4+2) + (3-1)i = 6+2i,
   (4+3i) . (2-i) = (8+3) + (-4+6)i = 11+2i,
   $(4+3i)^{-1} = (4-3i).((4+3i)(4-3i))^{-1} = (4-3i))(25)^{-1} = 4/25 - 3/25.i$,
   $(4+3i)^{-1}(2-i) = (4/25 - 3/25.i).(2-i) = 1/25 .[(8-3) + (-4-6)i] = 1/5 - 2/5i$.

Připomeňme, že umíme najít všechna řešení soustav lineárních rovnic o 2 či 3 neznámých nad reálnými čísly. Snadno si uvědomíme, že k tomu potřebujeme umět používat operace sčítání, násobení číslem, odčítání (tj. umíme najít "opačný prvek" ke každému) a dělení nenulovým číslem (tj. umíme najít "inverzní prvek" ke každému nenulovému číslu).

2. **Spočítejte všechna reálná (racionální, komplexní) řešení soustavy rovnic:**

   x+2y =5
   2x+y =4

   Hledáme průsečík dvou různoběžek v $\mathbf{R}^2$, který je zřejmě jednoznačně určen. Tedy $(x,y)^T=(1,2)^T$.

   Zřejmě je výše nalezené reálné řešení také racionálním i komplexním řešením. Výpočet (v reálném případě jsme disponovali geometrickým náhledem, nyní nám nezbývá než spolehnout se i v otázce existence či jednoznačnosti řešení na aritmetickou argumentaci), nám ukazuje, že žádné další komplexní řešení soustavy neexistuje. Zřejmě neexistuje ani žádné další racionální řešení, protože každé racionální řešení je rovněž reálným řešením soustavy.

3. **Spočítejte všechna reálná (racionální, komplexní) řešení soustavy rovnic:**

   x-3y =1
   -2x+6y =1

   V tomto případě nám geometrická interpretace řekne, že řešením soustavy jsou body ležící v průsečíku dvou přímek ve dvoudimenzionálním prostoru. Okamžitě ovšem zjistíme, že jde o rovnice dvou různých rovnoběžek, tedy množina všech řešení je prázdná. Aritmetickou úvahou (například přičteme-li k druhé rovnici dvojnásobek první, dostaneme sporný výraz 0=3, který samozřejmě pro žádná reálná, komplexní ani racionální x a y neplatí) opět zjistíme, že daná soustava nemá ani žádné racionální či komplexní řešení.

4. **Spočítejte všechna reálná (racionální, komplexní) řešení soustavy rovnic:**

   x-3y =1
   -2x+6y =-2

   Podobně jako v předchozím příkladě jsou směrové vektory přímek daných rovnicemi svými násobky. Snadno ovšem zjistíme, že rovnice vyjadřují jednu a tutéž přímku. Množinu všech řešení můžeme popsat parametricky například následovně: {(1,0)+t.(3,1)| t reálná}.

Obdobnou úvahou jako v předchozích úlohách nahlédneme, že všechna řešení soustavy v racionálním případě tvoří množinu {(1,0)+t.(3,1)| t racionální} a všechna řešení soustavy v komplexním oboru jsou tvaru (1,0)+t.(3,1), kde t je libovolné komplexní číslo.

5. **Najděte všechna reálná (racionální, komplexní) řešení soustavy rovnic:**

```
   2x+z =4
x+3y+2z = -1
  x+y+z =1
```

I v případě soustavy rovnic o třech neznámých nám geometrický náhled pomůže nalézt všechna řešení. Průnik rovin určených prvními dvěma rovnicemi je zřejmě přímka (roviny nejsou rovnoběžné), tato přímka může buď v třetí rovině ležet, nebo s ní může být rovnoběžná, případně bude různoběžná (v tom průnik bude právě jednobodový). Zjistíme-li v našem případě aritmetickými prostředky, že existuje řešení, vyjde buď jednoznačně nebo ho budeme hledat ve tvaru přímky (například vyjádřené opět parametricky).

Posloupností vhodných úprav, kdy vždy v následujících rovnicích eliminujme jednu proměnnou, dostaneme soustavu rovnic, v níž každá následující rovnice obsahuje méně prioměnných (tj. koeficienty u ostatních jsou rovny nule) než předcházející. Snadno nahlédneme, že dosadíme-li libovolnou hodnotu za z můžeme z 2. rovnice jednoznačně dopočítat hodnotu y a z 1. rovnice hodnotu x:

$$\begin{array}{c} 2x+z = 4 \\ x+3y+2z = -1 \\ x+y+z = 1 \end{array} \implies \begin{array}{c} x+y+z = 1 \\ -2y-z = 2 \\ 2y+z = -2 \end{array} \implies \begin{array}{c} x+y+z = 1 \\ 2y+z = -2 \end{array}$$

Tentýž postup můžeme zapsat pomocí matice (tzv. rozšířené matice soustavy), symbol ~ pro nás bude v tuto chvíli znamenat (zatím nedokázanou) skutečnost, že soustavy, jímž odpovídají matice nalevo i na prava od ~ mají stejnou množinu všech řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

V i-tém řádku každé z matic máme zapsány koeficienty u proměnných odpovídající příslušné i-té rovnici v soustavě. Tučně jsou vyznačené tzv. pivoty, tj. ty koeficienty, pomocí nichž můžeme postupně jednoznačně dopočítat jim příslušnou neznámou, zvolíme-li hodnotu neznámé odpovídající sloupci bez pivotu (jíž je v tomto případě právě z). Soustavu řeší tedy množina bodů: (2,-1,0)+t.(1,1,-2) pro všechna t reálná.

Elementární úpravy zřejmě nejsou nijak závislé na číselném oboru, s nímž pracujeme. Tedy stejně vyjádřené řešení (až na to, že t volíme z příslušného číselného oboru) dostáváme i nad komplexními a racionálními čísly.

Soustavu rovnic můžeme posloupností vhodných úprav řešit i v případech, které nejsou geometricky představitelné. Pokud nám řešení vyjde jednoznačně nebo zjistíme, že řešení neexistuje, je zřejmé že soustava má právě jedno nebo žádné řešení. Nejasná situace vznikne, pokud množina všech řešení bude větší než jednoprvková. Teprve později (v 5. kapitople) na přednášce dokončíte důkaz, že množina řešení popsaná v následujících příkladech je opravdu množinou všechna řešení.

6. **Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:**

```
x+y+z-u  = 3
x-y+2z+u = 3
```

Při výpočtu užijeme formalizovaného zápisu soustavy do rozšířené matice. Tu budeme upravovat obvyklými úpravami (tj. odečítat vhodné násobky výše položených řádků od níže položených, abychom se zbavili proměnné, tedy dostali v příslušném sloupečku u níže položených řádků nulu):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{-2} & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Nejprve potřebujeme najít jedno řešení soustavy. Zvolme proto za proměnné odpovídající sloupcům matice, které neobsahují tučně vyznačený prvek (tzv "nepivotální pozice", tedy třetí a čtvrtý sloupec, jímž odpovídají neznámé z a u) například 0 (o to snazší bude počítání). Potom už jednoznačně dopočítáme x a y. Tedy jedno řešení máme ve tvaru (x,y,z,u) = (3,0,0,0). Dále hledáme všechna řešení soustavy rovnic se stejnými levými stranami jako naše soustava a s nulovými pravými stranami (tzv homogenní soustavy). I tentokrát budeme vhodně volit a dopočítávat proměnné. Nebudeme v tuto chvíli dokazovat, že takovou vhodnou volbou bude následující postup: Volme na nepivotálních pozicích (tj. za proměnné z a u) posloupnosti 0 a 1, obsahující vždy právě jednu jedničku (v tomto speciálním případě půjde o volby (z,u)=(1,0) a (z,u)=(0,1)) a dopočítejme ostatní neznámé. Zřejmě dostaneme potřebný počet vektorů řešící homogenní soustavu, tedy (-3/2,1/2,1,0) a (0,1,0,1). Nyní zapíšeme množinu (všech) řešení původní soustavy ve tvaru: {(3,0,0,0) + s.(-3/2,1/2,1,0) + t.(0,1,0,1)| s a t reálná}.

14./8.10.

Prohlédneme-li si výpočty předchozích cvičení, uvědomíme si, že při upravování soustav rovnic pomocí ekvivalentních úprav (tzv. Gaussově eliminaci) potřebujeme jen některé vlastnosti reálných (racionálnách, komplexních) čísel; nijak například nevyužíváme jejich uspořádanost či topologické vlastnosti. To, co jsme při řešení úloh skutečně používali, jsou jisté vlastnosti operací + a . důležité pro chod Gaussovy eliminace a určování hodnot neznámých, jež byly na přednášce shrnuty v axiomatice tělesa.

Všimněme si nyní dalších příkladů těles.

7. **Spočítejte v tělese Z_5 hodnoty $(2)^{-1}$, $(4)^{-1}$, $(3.4 \pm 2)^{-1}$.**

Nejprve si určíme celou "násobilku" počítání modulo 5:

$$(1)^{-1} = 1$$
$$(2)^{-1} = 3, \text{ neboť } (2.3)\text{mod } 5 = (6)\text{mod } 5 = 1$$
$$(3)^{-1} = 2, \text{ neboť } (3.2)\text{mod } 5 = (6)\text{mod } 5 = 1$$
$$(4)^{-1} = 4, \text{ neboť } (4.4)\text{mod } 5 = (16)\text{mod } 5 = 1$$

Zbylé počítání už je téměř triviální

$$(3.4 \pm 2)^{-1} = (2 \pm 2)^{-1} = (4)^{-1} = 4 \text{ (v } \mathbf{Z}_5)$$

8. **Spočítejte pro každé nenulové x z tělesa Z_7 hodnotu x^{-1}.**

Úlohu vyřešíme "zkusmo" jako v příkladu 11. a protože v $\mathbf{Z}_7$ je 1.1=1, 2.4=1, 3.5=1 a 6.6=1 dostaneme

$$(1)^{-1} = 1, (2)^{-1} = 4, (3)^{-1} = 5, (4)^{-1} = 2, (5)^{-1} = 3, (6)^{-1} = 6.$$

9. **Nad Z_5 najděte všechna řešení soustavy rovnic:**

```
 x+2y+z = 4
x+4y+3z = 2
```

Budeme postupovat stejně, jako když jsme hledali řešení reálné soustavy rovnic, pouze samotné aritmetické operace budou dávat jiné výsledky. Budeme tedy provádět Gaussovu eliminaci rozšířené matice soustavy rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Pro volbu z=0 dostáváme, že y=4 a x=1. Tedy trojice $(1,4,0)^T$ je řešením dané nehomogenní soustavy rovnic. Zbývá vyřešit odpovídající homogenní soustavu: pro volbu z=1 dopočítáme z upravené matice, že y=4 a x=1. Tedy množinu (všech - poznamenejme ovšem, že kompletnost systému řešení pořád nemáme dokázánu) řešení lze vyjádřit jako (1,4,0)+t.(1,4,1) pro libovolné t ze $\mathbf{Z}_5$. Řešení je tedy jenom pět, můžeme je všechna vypsat: (1,4,0), (2,3,1), (3,2,2), (4,1,3) a (0,0,4).

10. **Nad tělesem Z_5 najděte všechna řešení soustavy rovnic:**

```
3x+2y+4z = 1
  4x+y+2z = 3
```

Opět budeme postupovat standardním postupem, který zapíšeme pomocí rozšířené matice soustavy rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nyní obvyklým způsobem určíme jedno řešení soustavy např. (2,0,0).Dále spočítáme dva (= počet "volných" proměnných) vektory řešící homogenní soustavu: (1,1,0) a (2,0,1). Tedy soustavu řeší všchny trojice (x,y,z) z množiny {(2,0,0)+t.(1,1,0)+s.(2,0,1)| s,t ze $\mathbf{Z}_5$}.

21./22.10.

Nechť $a_0 > a_1$ jsou dvě přirozená čísla. Připomeňme **Eukleidův algoritmus** hledání největšího společného dělitele (NSD) čísel a_0 a a_1: Známe-li a_i a a_{i+1} spočteme $a_{i+2} = (a_i) \bmod a_{i+1}$, algoritmus skončí, pokud $a_{i+2}=0$, potom $a_{i+1} = \mathrm{NSD}(a_0, a_1)$.

11. **Najděte dále taková celá čísla x a y, aby 1 = NSD(11, 31) = x.11 + y.31.**

Nejprva (v daném případě zdánlivě zbytečně) použijme na čísla 31 a 11 Euklidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele a sepišme si i jakým způsobem jednotlivé zbytky po celočíselném dělení získáme:

- $a_0 = 31$,
- $a_1 = 11$
- $a_2 = 31 - 2.11 = 9$,
- $a_3 = 11 - 9 = 2$,
- $a_4 = 9 - 4.2 = 1 = NSD(31,11)$,
- $a_5 = 0$.

Nyní si stačí uvědomit, že každé z čísel a_{i+2} dostaneme jako celočíselnou lineární kombinaci dvou předchozích hodnot a_i a a_{i+1}. Jednoduchou indukční úvahou zjistíme, že každé číslo a_{i+2} je celočíselnou lineární kombinaci hodnot a_1 a a_2. Konkrétně:

- $a_2 = 9 = 31 - 2.11$,
- a_3 $2 = 11 - 9 = 11 - (31 - 2.11) = 3.11 - 31$,
- $a_4 = 1 = (31 - 2.11) - 4.(3.11 - 31) = 5.31 - 14.11$.

Tedy (například) $x = -14$ a $y = 5$.

12. **Pomocí Eukleidova algoritmu určete hodnotu 11^{-1} v tělese Z_{31} (tedy modulo 31).**

V předchozím příkladu jsme pomocí Euklidova algoritmu zjistili, že (11.(-14))mod 31 = 1. Uvážíme-li dále, že (-14)mod 31 = 17, dostáváme v $\mathbf{Z}_{31}$, že 11^{-1} = (-14)mod 31 = 17. (Všimněme si, že jsme mohli rovnost 1 = 5.31 - 14.11 explicitně upravit: 1 = 5.31 - 11.31 + 31.11 - 14.11 = -6.31 + 17.11.)

13. **Pomocí Eukleidova algoritmu určete hodnotu 3^{-1}, 13^{-1} a 22^{-1} v Z_{31} (tedy modulo 31).**

Postupujeme stejně jako v předchozí úloze. Aplikujme-li na dvojici čísel 31 a 3 (resp. 13, resp. 22) Eukleidův algoritmus, dostaneme:

31	31	31
3	13	22
1 = 31 - 10.3	5 = 31 - 2.13	9 = 31 - 1.22
	3 = 13 - 2.5 = -2.31 + 5.13	4 = 22 - 2.9 = -2.31 + 3.22
	2 = 5 - 3 = 3.31 - 7.13	1 = 9 - 2.4 = 5.31 - 7.22 = -17.31 + 24.22
	1 = 3 - 2 = -5.31 + 12.13	

Zjistili jsme, že 1 = 31 - 10.3 = -5.31 + 12.13 = -17.31 + 24.22. Upravíme-li reovnosti modulo 31 (tj. zapomeneme-li na násobky čísla 31 dostaneme) modulo 31 je 3^{-1}=21 (= -10+31), 13^{-1}=12 a 22^{-1}=24.

Lineární nezávislost

1. **Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů (1,1,0,1), (2,1,1,1), (3,1,2,1) z vektorového prostoru R^4 nad tělesem R lineárně závislá či nezávislá.**

Potřebujeme zjistit, zda existuje nějaké netriviální (tj. nenulové) řešení vektorové rovnice

$$x_1.(1,1,0,1) + x_2.(2,1,1,1) + x_3.(3,1,2,1) = (0,0,0,0)$$

Snadno nahlédneme, že řešení dané vektorové rovnice jsou právě řešení homogenní soustavy rovnic s maticí levých stran A (pravé strany jsou nulové), tu následně upravujeme obvyklým způsobem (u matice homogenní soustavy rovnic vynecháváme sloupec nulových pravých stran, který se žádnými úpravami nemění):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aniž musíme nenulové řešení dopočítávat (ale zjevně jím jsou všechny násobky vektoru (1,-2,1)), zjišťujeme, že homogenní soustava rovnic s maticí A. a tudíž i výše uvedená vektorová rovnice mají netriviální řešení, a proto jsou přímo podle definice vektory (1,1,0,1), (2,1,1,1), (3,1,2,1) lineárně závislé.

2. **Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů (1,0,2,1), (2,0,1,1), (1,0,1,-1) z vektorového prostoru Q^4 nad tělesem Q lineárně závislá či nezávislá.**

Stejně jako v předchozí úloze se ptáme, zda existuje (a v takovém případě půjde o lineárně závislé vektory) či neexistuje (což by znamenalo, že dané vektory by byli lineárně nezávislé) netriviální řešení vektorové rovnice

$$x_1.(1,0,2,1) + x_2.(2,0,1,1) + x_3.(1,0,1,-1) = (0,0,0,0)$$

Úlohu převedeme na zjišťování jednoznačnosti řešení homogenní soustavy rovnic s maticí A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z upravené soustavy dostáváme jednoznačné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, tedy vektory (1,0,2,1), (2,0,1,1), (1,0,1,-1) jsou lineárně nezávislé.

3. **Najděte nějakou bázi podprostoru V vektorového prostoru R^4 generovaného vektory (1,1,0,1), (2,1,1,1), (-1,1,2,0), (0,1,3,0), (3,1,2,1) a určete dimenzi V.**

Připomeňme, že elementární úpravy provedené na posloupnost vektorů nezmění podprostor jimi generovaný. Sepíšeme-li si tedy generátory prostoru V do řádků matice a matici budeme obvyklým způsobem upravovat, budou řádky upravené matice generovat stejný vektorový prostor V. Upravíme-li řádky matice tak, aby výsledné nenulové řádky (které můžeme v souladu s pozorováním o podprostorech generovaných řádky vypustit) byly zjevně lineárně nezávislé, budou tyto nenulové řádky tvořit bázi daného prostoru. Tedy upravujme:

$$\begin{pmatrix} 1\,1\,0\,1 \\ 2\,1\,1\,1 \\ -1\,1\,2\,0 \\ 0\,1\,3\,0 \\ 3\,1\,2\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektory (1,1,0,1), (0,-1,1,-1), (0,0,4,-1) jsou zjevně lineárně nezávislé (neboť jsou uspořádány do odstupňované matice), navíc generují celý prostor V, proto je posloupnost (1,1,0,1), (0,-1,1,-1), (0,0,4,-1) bazí V.

Neboť dimenze je definována jako počet prvků (libovolné) báze, máme dim(V)=3.

29.10.

4. **Dokažte, že množina reálný polynomů jedné neurčité R[x] tvoří nad tělesem R vektorový prostor.**

Stačí přímočaře ověřit platnost axiomatiky vektorového prostoru pro sčítání polynomů a pro násobení polynomu reálným číslem.

5. **Dokažte, že vektorový prostor R[x] není nad tělesem R konečné dimenze.**

Předpokládejme, že M je nějaká konečná množina polynomů a označme m maximu ze stupňů polynomů v M. Potom polynom x^{m+1} neleží v $< M >$, tedy **R**[x] nenmůže být konečné dimenze.

6. **Ověřte, že množina $X = \{x^i \mid i > -1\}$ tvoří bázi vektorového prostoru R[x].**

Zřejmě je každý polynom lineární kombinací (konečně mnoha) polynomů z X. Položíme-li nějakou lineární kombinaci $a_0x^0+a_1x^1+...+a_nx^n = 0$, pak všechna $a_i = 0$, tedy přímo z definice vidíme, že X je lineárně nezávislá množina.

Dimenze a báze

1. **Vyberte z množiny X = {(2,4,0,1,4), (4,3,0,2,3), (1,2,3,4,0), (3,1,1,1,2), (4,3,4,0,2)} bázi podprostoru U = < X > vektorového prostoru Z_5^5.**

Stačí si uvědomit, které vektory z daného seznamu jsou lineární kombinací předchozích. Seřadíme-li si vektory postupně do řádků matice, kterou upravíme posloupností elementárních úprav na ostupňovaný tvar (například nejprve přičteme vhodné násobky prvního řádku k ostatním a poté přehodíme druhý a třetí řádek, s nímž stejným způsobem vynulujeme pátý a šestý řádek), stačí zjistit, kterým řádkům původní matice odpovídají nenulové řádky odstupňované matice. Řádky původní matice si označíme římskými číslicemi a budeme zaznamenávat všechna přehazování řádků:

$$\left(\begin{array}{c|l} 2\,4\,0\,1\,4 & \mathrm{I} \\ 4\,3\,0\,2\,3 & \mathrm{II} \\ 1\,2\,3\,4\,0 & \mathrm{III} \\ 3\,1\,1\,1\,2 & \mathrm{IV} \\ 4\,3\,4\,0\,2 & \mathrm{V} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|l} 2\,4\,0\,1\,4 & \mathrm{I} \\ 0\,0\,0\,0\,0 & \mathrm{II} \\ 0\,0\,3\,1\,3 & \mathrm{III} \\ 0\,0\,1\,2\,1 & \mathrm{IV} \\ 0\,0\,4\,3\,4 & \mathrm{V} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|l} 2\,4\,0\,1\,4 & \mathrm{I} \\ 0\,0\,3\,1\,3 & \mathrm{III} \\ 0\,0\,0\,0\,0 & \mathrm{II} \\ 0\,0\,0\,0\,0 & \mathrm{IV} \\ 0\,0\,0\,0\,0 & \mathrm{V} \end{array}\right)$$

Ukázalo se, že řádek II je násobkem řádku I a řádky IV a V jsou lineární kombinací řádků I a III. Naopak řádek III není lineární kombinací řádku I. Hledanou bázi tvoří tedy například první a třetí vektor množiny X, tedy množina {(2,4,0,1,4), (1,2,3,4,0)}.

5./11.11.

2. **Ověřte, že množina X = {(1,2,1), (2,-1,1), (1,-3,0), (1,7,2), (1,3,2)} generuje vektorový prostor R^3 a vyberte z X bázi R^3.**

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladě:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \mathrm{i} \\ 2 & -1 & 1 & \mathrm{ii} \\ 1 & -3 & 0 & \mathrm{iii} \\ 1 & 7 & 2 & \mathrm{iv} \\ 1 & 3 & 2 & \mathrm{v} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -5 & -1 & \mathrm{ii} \\ 0 & -5 & -1 & \mathrm{iii} \\ 0 & 5 & 1 & \mathrm{iv} \\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{v} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{v} \\ 0 & 0 & 4 & \mathrm{ii} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{iii} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{iv} \end{array}\right)$$

Tím jsme zjistili, že podprostor < X > je třídimenzionální, tedy < X > = $\mathbf{R}^3$ a navíc 1., 5. a 2. vektor množiny X určitě tvoří bázi $\mathbf{R}^3$, tj. například {(1,2,1), (1,3,2), (2,-1,1)} je hledanou bází.

3. **Doplňte lineárně nezávislou posloupnost B = ((2,4,0,1,4), (1,2,1,0,3)) na bázi aritmetického vektorového prostoru Z_5^5.**

Nejprve najdeme bázi podprostoru < B > tak, aby její vektory uspořádané do matice dali Gaussovu matici.

2 4 0 1 4   2 4 0 1 4

$$\begin{pmatrix} 1\;2\;1\;0\;3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0\;0\;1\;2\;1 \end{pmatrix}$$

Nyní snadno doplníme matici na odstupňovanou čtvercovou matici, jejíž všechny řádky jsou nenulové, například vektory kanonické báze (i-tý přidáme, právě když i-tý sloupec matice neobsahuje pivot) a přitom si všimneme, že:

$$\begin{pmatrix} 2\;4\;0\;1\;4 \\ 0\;1\;0\;0\;0 \\ 0\;0\;1\;2\;1 \\ 0\;0\;0\;1\;0 \\ 0\;0\;0\;0\;1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\;4\;0\;1\;4 \\ 0\;0\;1\;2\;1 \\ 0\;1\;0\;0\;0 \\ 0\;0\;0\;1\;0 \\ 0\;0\;0\;0\;1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\;4\;0\;1\;4 \\ 1\;2\;1\;0\;3 \\ 0\;1\;0\;0\;0 \\ 0\;0\;0\;1\;0 \\ 0\;0\;0\;0\;1 \end{pmatrix} = A.$$

Zřejmě má podprostor generovaný čádky matice A dimenzi 5, proto je podle Vety 2.22 roven $\mathbf{Z}_5{}^5$. Tedy posloupnost ((2,4,0,1,4), (1,2,1,0,3), (0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)) tvoří bázi $\mathbf{Z}_5{}^5$ rozšiřující posloupnost B.

4. **Uvažujme podprostor U = < (2,4,0,1,4), (1,2,1,0,3) > vektorového prostoru $Z_5{}^4$. Najděte bázi nějakého takového podprostoru V, aby UvV = $Z_5{}^4$ a průnik U a V byl nulový.**

Uvážíme, že jsme úlohu fakticky vyřešili v předchozím příkladu. Položme V = < (0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1) > (tedy V je podprostor generovaný vektory, jimiž jsme (2,4,0,1,4), (1,2,1,0,3) doplnili na bázi). Potom zřejmě UvV = $\mathbf{Z}_5{}^4$. Buď dále **w** vektor průniku U a V, tedy existují prvky a, b, c, x, y tělesa $\mathbf{Z}_5$ taková, že

w = x.(2,4,0,1,4) + y.(1,2,1,0,3),
w = a.(0,1,0,0,0) + b.(0,0,0,1,0) + c.(0,0,0,0,1),
proto a.(0,1,0,0,0) + b.(0,0,0,1,0) + c.(0,0,0,0,1) - x.(2,4,0,1,4) - y.(1,2,1,0,3) = (0,0,0,0,0).

Protože všech pět vektorů je lineárně nezávislých, máme přímo z definice a=b=c=x=y=0, tedy **w** = **0**. Dokázali jsme, že bází hledaného podprostoru W je tedy například posloupnost vektorů ((0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)).

5. **Najděte nějakou bázi podprostorů vektorového prostoru $Z_5{}^4$: U = < (2,1,1,1), (4,2,1,3), (3,4,3,0) > a V = < (2,0,3,4), (1,3,1,2), (1,4,0,2) >**

Obvyklým způsobem seřadíme generující vektory obou prostorů do matic a upravíme je pomocí elementárních transformací:

$$\begin{pmatrix} 2\;1\;1\;1 \\ 4\;2\;1\;3 \\ 3\;4\;3\;0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\;1\;1\;1 \\ 0\;0\;4\;1 \\ 0\;0\;0\;0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 2\;0\;3\;4 & \quad & 1\;0\;4\;2 \\ 1\;3\;1\;2 & & 0\;3\;2\;0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1\,4\,0\,2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

Tedy například posloupnost vektorů ((2,1,1,1), (0,0,4,1)) tvoří bázi podprostoru U a posloupnost ((1,0,4,2), (0,3,2,0)) tvoří bázi poprostoru V. Všimneme-li si, že žádné dva vektory v obou generujících množinách nejsou svými násobky, tedy nejsou lineárně závislé, pak každá dvojice vektorů z množiny {(2,1,1,1), (4,2,1,3), (3,4,3,0)} tvoří bázi dvojdimenzionálního prostoru U, stejně jako každá dvojice vektorů z množiny {(2,0,3,4), (1,3,1,2), (1,4,0,2)} tvoří bázi prostoru V.

6. **Najděte nějakou bázi spojení podprostorů U a V z předchozího příkladu a dimenzi jejich průniku.**

Předně si uvědomme, že spojení U a V (zde ho značme U+V) je podprostor generovaný všemi vektoru U i V. Stačí nám ovšem uvažovat jen báze U a V, které už jsme nalezli, tedy platí, že U+V = < (2,1,1,1), (0,0,4,1), (1,0,4,2), (0,3,2,0) >. Obvyklým způsobem najdeme bázi spojení U+V:

$$\begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,4\,1 \\ 1\,0\,4\,2 \\ 0\,3\,2\,0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,4\,1 \\ 0\,2\,1\,4 \\ 0\,3\,2\,0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1 \\ 0\,2\,1\,4 \\ 0\,0\,3\,4 \\ 0\,0\,4\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1 \\ 0\,2\,1\,4 \\ 0\,0\,1\,3 \\ 0\,0\,0\,4 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že bázi U+V tvoří například posloupnost vektorů (2,1,1,1), (0,2,1,4), (0,0,1,3) a (0,0,0,4), tedy dim(U+V)=4. To ovšem znamená, že U+V = $\mathbf{Z}_5^4$ (tedy mohli jsme vzít jakoukoli jinou bázi $\mathbf{Z}_5^4$, například kanonickou bázi, která by byla bazí U+V).

Nyní si stačí uvědomit, že podle věty o dimenzi spojení a průniku podprostorů je dim(UnV) = dim(U) + dim(V) - dim(U+V) = 2+2-4 = 0.

7. **Najděte nějakou bázi průniku podprostorů U a V aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{Z_3^4}$: U = < (1,1,1,1), (0,2,1,1), (0,0,1,2) > a V = < (1,2,2,1), (0,1,2,1), (0,0,2,2) >.**

Potřebujeme najít všechny vektory, které leží zároveň v U i ve V, tedy které jsou zároveň lineárními kombinacemi generátorů U i V. Vyjádříme si vektor ležící v průniku rovnicí:

$$x_1.(1,1,1,1) + x_2.(0,2,1,1) + x_3.(0,0,1,2) = y_1.(1,2,2,1) + y_2.(0,1,2,1) + y_3.(0,0,2,2),$$
$$x_1.(1,1,1,1) + x_2.(0,2,1,1) + x_3.(0,0,1,2) + y_1.(2,1,1,2) + y_2.(0,2,1,2) + y_3.(0,0,1,1) = (0,0,0,0).$$

Budeme hledat množinu všech řešení homogenní soustavy s maticí:

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,0\,2\,0\,0 \\ 1\,2\,0\,1\,2\,0 \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,2\,2\,2\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,2\,0\,0 \\ 0\,2\,0\,2\,2\,0 \\ 0\,1\,1\,2\,1\,1 \\ 0\,1\,2\,0\,2\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,2\,0\,0 \\ 0\,2\,0\,2\,2\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,2\,2\,1\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,2\,0\,0 \\ 0\,2\,0\,2\,2\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,2 \end{pmatrix}$$

Snadno dopočítáme, že množina všech řešení soustavy je tvaru < (1,2,2,1,0,0), (0,2,2,0,1,1) >, tedy bází prostoru všech řešení je například dvojice (1,2,2,1,0,0), (0,2,2,0,1,1). Zjistili jsme, že:

$$1.(1,1,1,1) + 2.(0,2,1,1) + 2.(0,0,1,2) = 1.(1,2,2,1) + 0.(0,1,2,1) + 0.(0,0,2,2) = (1,2,2,1),$$
$$0.(1,1,1,1) + 2.(0,2,1,1) + 2.(0,0,1,2) = 0.(1,2,2,1) + 1.(0,1,2,1) + 1.(0,0,2,2) = (0,1,1,0),$$

Tedy vektory (1,2,2,1) a (0,1,1,0) leží v průniku podprostorů U a V. Konečně si uvědomme, že libovolné řešení soustavy lze napsat ve tvaru

$$a_1.(1,2,2,1,0,0) + a_2.(0,2,2,0,1,1) = (a_1,2a_1+2a_2,2a_1+2a_2,a_1,a_2,a_2),$$

kde a_2 i a_2 leží v $\mathbf{Z}_3$, proto lze každý vektor z průniku vyjádřit:

$$a_1.(1,1,1,1) + (2a_1+2a_2).(0,2,1,1) + (2a_1+2a_2).(0,0,1,2) = a_1.(1,2,2,1) + a_2.(0,1,2,1) + a_2.(0,0,2,2),$$
$$a_1.[1.(1,1,1,1) + 2.(0,2,1,1) + 2.(0,0,1,2)] + a_2.[2.(0,2,1,1) + 2.(0,0,1,2)] = a_1.(1,2,2,1) + a_2.(0,1,1,0).$$

Tím jsme zjistili, že každý vektor z průniku U a V lze napsat ve tvaru $a_1.1.(1,2,2,1)+a_2.(0,1,1,0)$, tedy posloupnost ((1,2,2,1) a (0,1,1,0)) generuje množinu UnV. Zjevně se jedná o množinu lineárně nezávislou, tedy jde o bázi průniku (není těžké si uvědomit, že výsledné vektory budou jistě lineárně nezávislé, pokud jsme hledali jejich souřadnice vzhlem k bázím prostorů U a V).

Závěrem si ještě všimněme, že jsme soustavu nemuseli dopočítávat, neboť nám stačilo najít souřadnice báze řešení odpovídající proměnným y_i (poslední 3 souřadnice) nebo x_i (první 3 souřadnice).

8. **Určete dimenzi průniku podprostorů U a V racionálního vektorového prostoru Q^3, je-li U = < (1,2,1), (1,0,2) > a V = < (1,1,0), (1,-1,1) >.**

Obvyklým způsobem zjistíme, že dim U = dim V = 2 a dim (UvV) = 3, proto podle Věty 2.23 je dim (UnV) = dim U + dim V - dim (UvV) = 1.

12./18.11.

Hodnost matice

1. **Určete nad tělesem R a Z_5 hodnost matice A a matice A^T, pokud**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Připomeňme, že hodnost matice je právě dimenze podprostoru generovaného řádky matice, kterou můžeme spočítat jako počet nenulových řádků příslušné Gaussovy matice (viz Věta 4.9 z přednášky). Upravujme tedy naší matici posloupností elementárních úprav nad tělesem reálných čísel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že hodnost h(A) = 3 nad tělesem **R**. Věta 5.5 z přednášky nám říká, že h(A) = h(A^T), proto $h(A^T) = 3$. Podobně určíme hodnost A nad $\mathbf{Z}_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy nad $\mathbf{Z}_5$ je $h(A) = h(A^T) = 2$.

2. **Rozhodněte, zda lze nad tělesem Z_7 převést posloupností elementárních řádkových úprav matici M z předchozího příkladu na matici**

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Uvědomme si, že matici M lze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici N právě tehdy, když jsou prostory generované řádky obou matic stejné. V našem případě ovšem okamžitě vidíme, že $h(N) = 3$, zatímco $h(M) = 2$. Tedy poprostory generované řádky mají různou dimenzi, a proto se nemohou rovnat.

Zjistili jsme, že M nelze posloupností elementárních úprav převést na N.

3. **Rozhodněte, zda lze nad reálnými čísly převést posloupnpstí elementárních řádkových úprav matici A na matici B. kde**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Budeme-li matici C definovat jako matici obsahující postupně všechny řádky matice A a matice B, stačí nám zjistit, zda $h(A) = h(B) = h(C)$. Pokud by $h(A) = h(B) = h(C)$, pak podprostory generované řádky matice A a B (a C) byly shodné, tedy by řádky B bylo možné dostat jako lineární kombinaci řádků A. V opačném případě by podprostory generované řádky matice A a B byly různé, proto by nebylo možné matici A posloupností elementárních úprav převést na matici B. Okamžitě vidíme, že $h(A) = h(B) = 2$. Zbývá standardním způsobem určit hodnost matice C:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $h(C) = 3$, proto matici A nelze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici B.

4. **Rozhodněte, zda lze nad tělesem R převést posloupností elementárních řádkových úprav matici A na matici B pro**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Postupujeme-li obdobně jako v předchozí úloze, zjistíme, že h(A) = h(B) = 2 a

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy i h(C) = 2. Matici A proto lze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici B.

Všimněme si, že jsme také mohli postupovat přímo, t.j. uvědomit si, že oba řádkové vektory (1,0,-1) a (1,3,5) matice B dostaneme jako lineární kombinaci řádkových vektorů matice A.

5. **Rozhodněte, zda lze nad tělesem R převést posloupností elementárních řádkových úprav matici A na matici E, pokud**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uvědomíme-li si, že řádky matice E generují celý (3-dimenzionální) vektorový prostor $\mathbf{R}^3$, stačí nám tentokrát zjistit, zda řádky matice A generují celý prostor $\mathbf{R}^3$, tj. zda h(A)=3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že h(A) = 3, proto opět lze matici A převést posloupností elementárních úprav na jednotkovou matici E.

6. **Buď A a B takové matice typu (n,m) nad tělesem T, že prostory W_A resp. W_B všech řešení homogenních soustav rovnic s maticí A resp. B jsou stejné. Dokažte, že matici A lze posloupností elementárních řádkových úprav převést na matici B.**

Můžeme využít üvahu, kterou jsme udělali v příkladu 4. Tedy stačí ukázat, že h(A) = h(B) = h(C), kde matice C obsahuje na řádcích právě všechny řádky matic A a B.

Z Věty 5.8 z přednášky víme, že $\dim(W_A) = m - h(A)$ a $\dim(W_B) = m - h(B)$. Protože navíc $\dim(W_A) = \dim(W_B)$, snadno dostáváme, že h(A) = h(B).

Nyní si uvědomme, jak vypadá množina W_C:

$$W_C = \{\mathbf{x} \text{ z } T^m | \, C\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T\} = \{\mathbf{x} \text{ z } T^m | \, A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T \text{ a } B\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T\} = W_A \text{ n } W_B = W_A = W_B.$$

Tedy i $\dim(W_C) = \dim(W_A)$, proto $h(A) = h(B) = h(C)$.

Permutace a determinanty

1. **Zapište v cyklickém zápisu a redukovaném cyklického zápisu permutace**

$$p = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,4\,1\,6\,5\,2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad q = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,3\,6\,4\,2\,5 \end{pmatrix}$$

Postupně vyčerpáme všechny prvky z množiny {1, 2, 3, 4, 5, 6}, abychom zapsali cykly permutací: p = (13)(246)(5), q = (1)(2365)(4). V redukovaném cyklyckém zápisu vynecháme všechny jednocykly: p = (13)(246), q = (2365).

2. **Mějme p=(135)(4798)(26) a q=(18)(247693) dvě permutace z S_9. Určete pq, qp, p^{-1} a q^{-1}.**

Přímo použitím definice snadno zjistíme hodnoty (skládáme zprava doleva):

$$pq = (1495)(27)(368)$$
$$qp = (129)(3587)(46)$$
$$p^{-1} = (531)(8974)(62)$$
$$q^{-1} = (81)(396742)$$

25./19.11.

3. **Napište permutace p_1 = (13475) a p_2 = (267)(3548) jako součin transpozic.**

Připomeňme, že transpozice je permutace, která vyměňuje právě dva prvky, tj. můžeme ji v redukovaném cyklickém zápisu zapsat ve tvaru (ab). Řešení úlohy je zřejmé z důkazu Věty 6.9, která říká, že každou permutaci lze zapsat jako součin transpozic. Snadno nahlédnem, že platí:

(13475) = (13) . (34) . (47) . (75) = (15) . (17) . (14) . (13),
(267)(3548) = (26) . (67) . (35) . (54) . (48) = (27) . (26) . (38) . (34) . (35).

4. **Určete znaménka permutací p_1 = (13475), p_2 = (267)(3548) a p_3 = (374)(8135) z S_8.**

Podle definice má permutace znaménko +1 (tj. jde o sudou permutaci), právě když ji můžeme napsat jako součin sudého počtu transpozic a permutace má znaménko -1 (tj. je to lichá permutace), pokud ji můžeme napsat jako součin lichého počtu transpozic. V předchozím příkladu jsme vyjádřili permutaci p_1 jako součin 4 transpozic, proto zn p_1 = 1, a permutaci p_2 jsme dostali jako součin 5 transpozic, tedy zn p_2 = -1. Uvážíme-li, že permutace p_3 má stejný typ jako permutace p_2 (tj má stejný počet stejně dlouhých cyklů), snadno nahlédneme, že permutace p_2 a p_3 dostaneme jako součin stejného počtu transpozic, tedy znaménka permutací p_2 i p_3 jsou stejná a zn p_3 = -1.

5. **Spočítejte znaménko permutací p, q, p^{-1} a qp^{-1} z příkladu 2.**

Znaménka permutací p a q můžeme tentokrát určit pomocí Věty 6.15 z přednášky. Permutaci p můžeme chápat jako součin cyklu délky 3, 4 a 2, tedy zn p = $(-1)^{3-1}(-1)^{4-1}(-1)^{2-1} = 1$ a podobně zn q = $(-1)^{2-1}(-1)^{6-1} = 1$, tedy obě permutace jsou sudé (mají kladné znaménko). Dále zn p^{-1} = zn p = 1 a zn qp^{-1} = zn q . zn p^{-1} = 1.1 = 1 podle Věty 6.13.

6. **Spočítejte nad tělesy R, Z_5 a Z_7 determinanty matic:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

V obou případech determinant spočítáme přímo podle definice:

det A = 1.1 - 2.3 = -5 nad **R** (=0 nad $\mathbf{Z}_5$ a =2 nad $\mathbf{Z}_7$)
det B = 1.0.2 + 2.3.2 + 1.4.2 - 1.0.2 - 2.4.2 - 1.3.2 = 20 - 22 = -2 nad **R** (=3 nad $\mathbf{Z}_5$ a =5 nad $\mathbf{Z}_7$)

7. **Spočítejte determinanty matic nad tělesem racionálních čísel:**

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0 \\ 7&1&0&0&0 \\ 5&4&3&0&0 \\ 6&4&3&1&0 \\ 1&2&3&2&2 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 5&4&3&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 1&2&3&2&2 \\ 6&4&3&1&0 \\ 7&1&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 5&4&3&0&5 \\ 2&0&0&0&2 \\ 1&2&3&4&3 \\ 6&4&3&2&6 \\ 7&1&0&0&7 \end{pmatrix}$$

Neboť je matice M_1 dolní trojúhelníková, stačí, abychom vynásobili hodnoty na diagonále, tj. det M_1 = 2.1.3.1.2 =12.

Matice M_2 se od matice M_1 liší jen pořadím řádků. Víme, že přehození řádků v matici změní znaménko determinantu, potřebujeme tedy zjistit, kolik transpozic řádků je zapotřebí, abychom z matice M_1 dostal matici M_2. Bude-li jich zapotřebí sudý počet, pak budou determinanty matic M_1 a M_2 stejné, bude-li jich třeba lichý počet, pak budou mít determinanty matic M_1 a M_2 opačné znaménko (viz Důsledek 7.7). Potřebujeme tedy zjistit, zda je permutace (1352), která udává permutaci řádků matice M_2, sudá nebo lichá. Okamžitě vidíme, že zn (1352) = -1, proto

$$\det M_2 = -\det M_1 = -12.$$

Všimněme-si, že matici M_3 dostaneme z matice M_2 přičtením 1. sloupce k sloupci 5. a vynásobením 4. sloupce číslem 2. Uvědomíme-li si, že přičtení násobku řádku (nebo sloupce) k jinému řádku (nebo sloupci) nezmění determinant matice a že vynásobení řádku nebo sloupce skalárem x adekvátně vynásobí i determinant matice, vidíme, že

$$\det M_3 = \det \begin{pmatrix} 5&4&3&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 1&2&3&4&2 \\ 6&4&3&2&0 \\ 7&1&0&0&0 \end{pmatrix} = 2 \,.\, \det \begin{pmatrix} 5&4&3&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 1&2&3&2&2 \\ 6&4&3&1&0 \\ 7&1&0&0&0 \end{pmatrix} = 2 \,.\, \det M_2 = -24.$$

8. **Určete nad tělesem reálných čísel determinant matice**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Protože víme, jak determinant matice A změní elementární úpravy a determinant horní (stejně jako dolní) trojúhelníkové matice spočítáme velmi snadno, převedeme posloupností elementárních úprav matici A na odstupňovaný tvar:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} = 1/2 \,.\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -10 \end{pmatrix} = 1/2 \,.\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 3.$$

9. **Spočítejte nad racionálními čísly determinant matice**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

V matici B sice neobsahuje žádný řádek ani sloupec větší počet nul, ovšem dva sloupce se liší jen na jedné pozici. Víme, že odečteme-li od jednoho z těchto sloupců druhý, nezmění se hodnota determinantu. Po této úpravě už ovšem můžeme použít metodu rozvoje podle sloupce:

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 2.\det \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Poté odečteme od prvního řádku trojnásobek druhého řádku. Na prvním řádku zůstanou dva nenulové prvky, podle nichž determinant rozvedeme a snadno dopočítáme:

$$\det B = 2.\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 2.(-5).\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} - 2.1 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -10.(14-1+3+14) - 2.(4+1+12+4+4-3) = -344.$$

10. **Spočítejte nad tělesem racionálních čísel determinant obecné matice nxn, kde $d_{ii}=d_{ii+1}=1$ a $d_{i+1i}=-1$ a jinde je $d_{ij}=0$, tj.**

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozvedeme-li matici D_n podle prvního sloupce, dostaneme $D_n = D_{n-1}$ - det A_{n-1}. Rozvojem podle prvního řádku matice A_{n-1} zjistíme, že det A_{n-1}= $-D_{n-2}$. Tedy platí rekurentní vzorec $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$. Přímým výpočtem zjistíme, že $D_1=1$ a $D_2=2$.

24/26.2.

Bilineární a kvadratické formy

1. **Ověřte, že je zobrazení f: R^2xR^2 do R dané předpisem $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2$ bilineární forma.**

   Potřebujeme dokázat, že jsou zobrazení f(**v**,-) a f(-,**v**) lineární formou na $\mathbf{R}^2$ pro každý vektor **v** z $\mathbf{R}^2$, což zřejmě platí.

2. **Najděte matici bilineární formy f z předchozího příkladu vzhledem ke kanonické bázi.**

   Podle definice potřebujeme spočítat hodnoty $a_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ a sepsat je do matice $[f]_{K2} = (a_{ij})$:

   $$f((1,0), (1,0)) = f((0,1), (1,0)) = f((0,1), (0,1)) = 0 \text{ a } f((1,0), (0,1)) = 1.$$

   Tedy $[f]_{K2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Všimněme si, že jsme matici $[f]_{K2}$ nemuseli počítat. Neboť musí platit, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x}\}_{K2}[f]_{K2}\{\mathbf{y}\}_{K2}^T = \mathbf{x}[f]_{K2}\mathbf{y}^T$, je koeficient u členu x_iy_i je právě hodnota na i-tém řádku a j-tém sloupci matice $[f]_{K2}$.

3. **Určete matici bilineární formy f z předchozího příkladu vzhledem k bázi B = ((1,1), (3,2)).**

   Opět můžeme postupovat podle definice:

   $$f((1,1), (1,1)) = 1 , f((1,1), (3,2)) = 2 , f((3,2), (1,1)) = 3, f((3,2), (3,2)) = 6.$$

   Zjistili jsme, že $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

4. **Ověřte, že je zobrazení g ze $Z_5{}^3xZ_5{}^3$ do Z_5 dané předpisem $g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + x_3y_3$ bilineární forma a najděte jeho matici vzhledem ke kanonické bázi K_3 a matici vzhledem k bázi C = ((1,1,0), (1,0,1), (1,0,0)).**

   Víme (Věty 12.3 a 12.5), že g je bilineární forma právě tehdy, když ji lze napsat ve tvaru $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x}\}_B[g]_B\{\mathbf{y}\}_B^T$ pro libovolnou bázi B, speciálně pro kanonickou bázi má platit $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}[g]_{K3}\mathbf{y}^T$. Tedy ptáme se, zda lze $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ napsat jako maticový součin $\mathbf{x}A\mathbf{y}^T$ pro nějakou čtvercovou matici řádu 3. To zjevně lze a

$$A = [g]_{K3} = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 3 \\ 1\ 3\ 1 \end{pmatrix}.$$

Protože $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x}\}_B[g]_B\{\mathbf{y}\}_B{}^T = \{\mathbf{x}\}_C[g]_C\{\mathbf{y}\}_C{}^T$ pro každou dvojici bází B a C, dostáváme v souladu s Větou 12.7 korespondenci matic bilienární formy $[g]_C = [Id]_{CB}{}^T[g]_B[Id]_{CB}$. Tedy v našem případě najdeme nejprve matici přechodu $[Id]_{CK3}$ a poté vynásobíme:

$$[g]_C = [Id]_{CK3}{}^T[g]_C[Id]_{CK3} = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 3 \\ 1\ 3\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ 1\ 2 \\ 1\ 0\ 3 \\ 2\ 3\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. **Najděte analytické vyjádření bilineární formy h na vektorovém prostoru $Z_3{}^2$ vzhledem ke kanonické bázi (tj. jde o zobrazení $Z_3{}^2 x Z_3{}^2$ do Z_3), je-li B = ((1,2), (1,0)) báze a známe matici h vzhledem k B**

$$[h]_B = \begin{pmatrix} 1\ 1 \\ 2\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potřebujeme vlastně najít matici bilineární formy h vzhledem ke kanonické bázi, která obsahuje všechny koeficienty analytického zápisu. Na to podobně jako v minulé úloze využijeme Větu 12.7, tedy $[h]_{K2} = [1]_{K2B}{}^T[h]_B[1]_{K2B}$. Nejprve tedy potřebujeme určit matici přechodu $[1]_{K2B}$:

$$[1]_{K2B} = ([1]_{BK2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1\ 1 \\ 2\ 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0\ 2 \\ 1\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní vynásobíme matice:

$$[h]_{K2} = [1]_{K2B}{}^T[h]_B[1]_{K2B} = \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 2\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\ 1 \\ 2\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\ 2 \\ 1\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 0\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2)\ [h]_{K2}\ (y_1,y_2)^T = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_2$.

6. **Najděte levý a pravý vrchol bilineární formy g na prostoru $Z_7{}^3$ dané maticí vzhledem ke kanonické bázi**

$$[g]_{K3} = \begin{pmatrix} 5\ 2\ 1 \\ 2\ 6\ 0 \\ 4\ 4\ 6 \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že podle Poznámky 12.10 jsou souřadnice vzhledem ke kanonické bázi vektorů ležících v levé vrcholu $V_l(g)$ právě řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[g]_{K3}{}^T$ a souřadnice vzhledem ke kanonické bázi vektorů ležících v pravém vrcholu $V_p(g)$ jsou právě řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[g]_{K3}$.

Snadno zjistíme, že vektor (1,6,1) tvoří bázi množiny všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[g]_{K3}^T$ a vektor (3,6,1) tvoří bázi množiny všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[g]_{K3}$. To znamená, že $V_l(g) = <(1,6,1)>$ a $V_p(g) = <(3,6,1)>$.

7. **Najděte levý a pravý vrchol bilineární formy f z příkladu 1, formy g z příkladu 4 a formy h z příkladu 5.**

Díky Větě 12.10 nám stačí vyřešit homogenní soustavu rovnic s maticí $[f]_{K2}^T$ a $[f]_{K2}$, tedy $V_l(f) = <(0,1)>$ $V_p(f) = <(1,0)>$.

Obvyklým způsobem zjistíme, že jsou matice $[g]_{K3}$ a $[h]_{K2}$ a proto i bilineární formy g i h regulární, proto $V_l(g) = V_p(g) = \{(0,0,0)\}$ a $V_l(h) = V_p(h) = \{(0,0)\}$.

3/5.3.

8. **Pro bilineární formy z příkladu 1 a z příkladu 5 najděte jednoznačně určené symetrické bilineární formy f_s, h_s a antisymetrické bilineární formy f_a, h_a tak, aby platilo $f=f_s+f_a$ a $h=h_s+h_a$.**

Rozklad na symetrickou a antisymetrickou část provedeme pomocí Věty 12.20(iii). Zapsáno v maticovém zápisu je

$$[f_s]_{K2} = 2^{-1} . ([f]_{K2} + [f]_{K2}^T) = 2^{-1}.\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_{K2} = 2^{-1} . ([f]_{K2} - [f]_{K2}^T) = 2^{-1}.\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočítali jsme, že $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 1/2 . (x_1y_2 + x_2y_1)$ a $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 1/2 . (x_1y_2 - x_2y_1)$.

Stejným způsobem najdeme i rozklad h, matici $[h]_{K2}$ jsme už v 5. příkladu nalezli a můžeme ji využít:

$$[h_s]_{K2} = 2^{-1}.\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$[h_a]_{K2} = 2^{-1}.\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. **Najděte nenulovou symetrickou bilineární formu, která je zároveň antisymetrická.**

Podle Věty 12.20 musí být hledaná forma nad tělesem charakteristiky 2. Přitom pro každý prvek a tělesa charakteristiky 2 platí, že -a = a, tedy pro každou bilineární formu g nad takovým tělesem g(**u**, **v**) = g(**v**, **u**) právě tehdy, když g(**u**, **v**) = -g(**v**, **u**). To znamená, že nad tělesem charakteristiky 2 je bilineární forma symetrická, právě když je antisymetrická. Snadno nahlédneme, že například $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1$ je symetrická i antisymetrická bilineární froma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_2{}^2$

10. **Najděte nějakou polární bázi symetrické bilineární formy f na vektorovém prostoru R^2 dané předpisem $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 2x_2y_2$.**

Nejprve obvyklým způsobem určíme matici symetrické bilineární formy vzhledem ke kanonické bázi $\mathbf{R}^2$:

$$[f]_{K2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní budeme tuto matici upravovat posloupností symetrických elementárních úprav (tj. provedeme vždy stejnou řádkovou a sloupcovou úpravu) tak, abychom dostali diagonální matici. Řádkové úpravy budeme zachycovat obvyklým způsobem (jako při hledání inverzní matice) do matice:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\text{sym}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Budeme-li vzniklou diagonální matici chápat jako matici bilineární formy f vzhledem k nějaké nové bázi M, dostaneme vztah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = [f]_M = [Id]_{MK2}{}^T\ [f]_{K2}\ [Id]_{MK2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $[Id]_{MK2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Snadno určíme bázi M = ((1,0), (3,1)), vůči níž je matice f diagonální, tedy M je polární báze f.

11. **Buď g symetrická bilineární forma na $Z_5{}^2$ splňující podmínky g((1,2),(1,2))=2, g((1,2),(1,0))=1 a g((1,0),(1,0))=4. Najděte nějakou polární bázi g.**

Předně si uvědomme, že pro symetrickou bilineární formu g platí, že g(**u**,**v**) = g(**v**,**u**), tedy i g((1,2),(1,0))=g((1,0),(1,2))=1. To znamená, že symetrická bilineární forma g je danými podmínkami jednoznačně určena a její matice vzhledem k bázi B = ((1,2), (1,0)) je

$$[g]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Stejnou úvahou jako v předchozím příkladu najdeme matici přechodu od báze B k nějaké polární bázi C ze vztahu $[g]_C = [Id]_{CB}{}^T\ [g]_B\ [Id]_{CB}$. Opět tedy upravujeme matici $[g]_B$ na diagonální:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\text{sym}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $[Id]_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Neboť ve sloupcích matice přechodu $[Id]_{CB}$ máme souřadnice vektorů hledané polární báze C vzhledem k bázi B, stačí dopočítat

$$(1,2) = 1.(1,2) + 0.(1,0) \quad \text{a} \quad (3,4) = 2.(1,2) + 1.(1,0).$$

Našli jsme polární bázi C = ((1,2), (3,4)).

12. **Najděte nějakou polární bázi symetrické bilineární formy g na vektorovém prostoru R^2, známe matici g vzhledem ke kanonické bázi**

$$[g]_{K2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Postupujeme stejně jako v předchozí úloze, ale tentokrát navíc musíme provést symetrickou úpravu, kterou na pozici 1. řádku a prvním sloupci dostaneme nenulový prvek (stačí přičíst 2. řádek a 2. sloupec k 1.):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\text{sym}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\text{sym}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Z pravé části poslední matice stejným způsobem jako v předchzím příkladu určíme polární bázi ((1,-1), (1/2,1/2)).

10./12.3.

13. **Rozhodněte, zda je zobrazení h_2 z R^2xR^2 do R dané předpisem $h_2((x_1, x_2)) = x_1^2 + 4x_1y_2 + 3x_2^2$ kvadratická forma.**

Snadno nahlédneme, že můžeme dané zobrazení vyjádřit ve tvaru

$$h_2((x_1, x_2)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Proto $h_2((x_1, x_2)) = h((x_1, x_2), (x_1, x_2))$ pro symetrickou bilineární formu h (tzv.) s maticí vzhledem ke kanonické bázi

$$[h]_{K2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tedy $h_2(\mathbf{u}) = h(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ je podle definice kvadratická forma.

14. **Určete polární bilineární formu, vrchol a signaturu kvadratické formy h_2 z předchozího příkladu.**

Hledáme symetrickou bilineární formu, která kvadratickou formu vytváří (tj. takové formy h, že $h_2(\mathbf{u}) = h(\mathbf{u}, \mathbf{u})$), její matici vzhledem ke kanonické bázi jsme už spočítali:

$$[h_2]_{K2} = [h]_{K2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vrchol kvadratické formy je podle definice právě vrchol příslušné polární symetrické bilineární formy. Vidíme, že h je regulární bilineární forma, tudíž $V(h_2) = V(h) = \{\mathbf{0}\}$.

Konečně signaturou rozumíme trojici (n,p,q), kde n je počet nul, p počet kladných čísel a q počet záporných čísel na diagonále matice h (resp. h_2) vzhledem k nějaké polární bázi. Budeme tedy symetrickými úpravami upravovat matici $[h_2]_{K2}$ (tentokrát už nemusíme úpravy zaznamenávat, protože nás příslušná polární báze nezajímá):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \sim_{\text{sym}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že signatura (která podle Zákona setrvačnosti nezávisí na volbě polární báze) kvadratické formy h je (0,1,1).

15. **Rozhodněte, zda pro kvadratickou formu h_2 z předchozích dvou příkladu existuje nenulový vektor v tak, aby a) $f_2(v) > 0$, b) $f_2(v) < 0$, c) $f_2(v) = 0$. Existuje-li takový vektor, najděte ho.**

a) Okamžitě vidíme, že hodnota f_2 je kladná například na obou vektorech kanonické báze, tedy $f_2((1,0)) = 1$ a $f_2((0,1)) = 3$.

b) Potřebujeme zjistit, zda je či není kvadratická forma f_2 pozitivně semidefinitní. Není-li, pak existuje vektor **v** na němž je hodnota f_2 záporná. Snadno obvyklým způsobem zjistíme, že daná forma je indefinitní. Zbývá najít polární bázi, v níž se nachází požadovaný vektor:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\text{sym}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Tedy našli jsme polární bázi P=((1,0), (-2,1)), vůči níž je matice f_2:

$$[f_2]_P = [h]_{K2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $f_2((-2,1)) = -1$.

c) Vyjádřeme si hledaný vektor **v** pomocí získané báze P, tedy $\mathbf{v} = a.(1,0) + b.(-2,1)$, tj. $\{\mathbf{v}\}_P = (a,b)$. Nyní víme, že $f_2(\mathbf{v}) = \{\mathbf{v}\}_P[f_2]_P\{\mathbf{v}\}_P^T. = a^2 - b^2$. Chcem-li, aby $f_2(\mathbf{v}) = 0$, dostáváme rovnici $a^2 - b^2 = 0$, kterou řeší například a=b=1. Našli jsme tedy vektor **v** = 1.(1,0) + 1.(-2,1) = (-1,1), pro nějž platí, že $f_2((-1,1)) = 0$.

16. **Buď g_2 indefinitní kvadratická forma na konečně dimenzionálním reálném vektorovém prostoru.. Dokažte, že existuje nenulový vektor v, pro nějž $g_2(v)=0$.**

Označme $(n(g_2), p(g_2), q(g_2))$ signaturu g_2. Uvažujme stejně jako v předchozí úloze. Kdyby $n(g_2) > 0$, stačilo by jako vektor **v** zřejmě vzít nějaký nenulový vektor vrcholu. Neboť je g_2 indefinitní, je $p(g_2) > 0$ i $q(g_2) > 0$ Existuje tedy polární báze $P = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ tak, že $g_2(\mathbf{p}_i) = 1$ pro vhodné i a $g_2(\mathbf{p}_j) = -1$ pro vhodné j. Nyní už zřejmě $g_2(\mathbf{p}_i+\mathbf{p}_j) = 0$. Dokázali jsme, že pro každou indefinitní kvadratickou formou g_2 existuje nenulový vektor v, pro nějž $g_2(v)=0$.

17. **Najděte nějakou polární bázi kvadratické formy f_2 na vektorovém prostoru Z_7^3 dané analytickým vyjádřením $f_2((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3$.**

Snadno určíme matici f_2

$$[f_2]_{K3} = [f]_{K3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní pracujeme s maticí polární bilineární formy f kvadratické formy f_2 standardním způsobem, tj. matici opět převedeme symetrickými úpravami na diagonální matici a použité řádkové elementární úpravy zazanamenáme:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\text{sym}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\text{sym}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

V řádcích pravé strany upravené matice vidíme, že polární bázi f_2 tvoří například vektory (1,0,0), (0,1,0), (5,5,1).

18. **Určete signaturu kvadratických forem g_i na reálném vektorovém prostoru R^2 s maticí vzhledem ke kanonické bázi:**

$$[g_1]_{K2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [g_2]_{K2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [g_3]_{K3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad [g_4]_{K2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Potřebujeme jen převést matice posloupností symetrických úprav na daigonální a poté zjistit počet kladných čísel, nul a záporných čísel na diagonále.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\text{sym}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, signatura je (1,1,0) ($g_1$ pozitivně semidefinitní).

$-1 \ -1 \qquad 0 \ 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim_{sym} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$, to znamená, že signatura je (0,1,1) (g_3 je indefinitní).

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_{sym} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, signatura je (0,2,0) ($g_4$ je pozitivně definitní).

19. **Spočítejte signaturu kvadratické formy f_2 na vektorovém prostoru R^3 dané analytickým vyjádřením $f_2((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$.**

Obvyklým způsobem určíme matici

$$[f_2]_{K3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyní upravíme matici $[f_2]_{K3}$ posloupností symetrických úprav na diagonální matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim_{sym} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim_{sym} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Nyní stačí podle definice přepočítat nuly, kladná čísla a záporná čísla na diagonále a seřadit tato čísla do signatury (0,2,1) kvadratické formy f_2.

20. **Rozhodněte, zda existuje nenulový vektor v, pro nějž $f_2(v)=0$, kde f_2 je kvadratická forma z předchozího příkladu.**

Kdyby $n(f_2) > 0$, tj. kdyby vrchol f_2 byl nenulový, stačilo by jako vektor **v** zřejmě vzít nějaký nenulový vektor vrcholu. V předchozím příkladu jsme ovšem zjistili, že signatura f_2 je (0,2,1), tedy vrchol má f_2 triviální. Daná signatura ovšem zaručuje existenci takové polární báze P = ($\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$), že $f_2(\mathbf{p}_1) = f_2(\mathbf{p}_2) = 1$ a $f_2(\mathbf{p}_3) = -1$. Označíme-li f polární bilineární formu kvadratické formy f_2, snadno nahlédneme, že

$$f_2(\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3) = f(\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3) = f_2(\mathbf{p}_2) + f_2(\mathbf{p}_3) + 2.f(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = 1 - 1 + 2.0 = 0.$$

Regulární matice

1. **Rozhodnětě, zda je reálné matice B a B^{147} regulární, jestliže**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Podle Věty 7.18 z přednášky stačí zjistit, zda je det(B) a det(B^{147}) nenulový. Determinant matice B jsme už spočítali (v příkladu 9 předchozí sekce): det(B) = -344, proto je B regulární matice. Dále podle Věty 7.21 je det(B^{147}) = det$(B)^{147}$, navíc det(B) je nenulový, právě když je det$(B)^{147}$ nenulový. Tedy i matice B^{147} je regulární.

2. **Rozhodněte, zda je nad tělesy Q, Z_5 a Z_7 regulární matice M a matice M^{631}, jestliže**

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

I tentokrát nám samozřejmě stačí spočítat determinant, nejprve nad tělesem charakteristiky 0. Využijeme po úpravě rozvoj podle sloupce a řádky:

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -22.$$

Tedy determinant matice M (a podle Věty 7.21 i matice M^{631}) je nenulový i nad $\mathbf{Z}_5$, $\mathbf{Z}_7$. Matice M a M^{631} jsou tedy regulární nad tělesy **Q**, $\mathbf{Z}_5$ i $\mathbf{Z}_7$.

3. **Spočítejte nad tělesem Z_5 a Z_7 determinant matice M^{631}, kde M je matice z předchozí úlohy.**

Víme, že det(M^{631}) = det$(M)^{631}$. Navíc snadno dopočítáme (viz předchozí příklad), že det(M) = 3 nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a det(M) = 6 nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. Stačí nám tedy spočítat 3^{631} nad $\mathbf{Z}_5$ a 6^{631} nad $\mathbf{Z}_7$. Všimněme si, že $3^4 = 1$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $6^2 = 1$ nad $\mathbf{Z}_7$. Proto

$\det(M^{631}) = (3^4)^{157}.3^3 = 2$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $\det(M^{631}) = (6^2)^{315}.6 = 6$ nad $\mathbf{Z}_7$.

3.12.

4. **Rozhodněte pro která racinální a jsou regulární matice P(a), Q(a) a $P(a)^{15}.Q(a)^7$, jestliže.**

$$P(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \qquad Q(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nejprve spočítáme jejich determinanty:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = a - a^2, \qquad \det \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -(a+1) - (a-1) - [-(a+1) + a] = 1-2a.$$

Věta 8.4 z přednášky říká, že je matice regulární, právě když je její determinant nenulový. Determinaty matic P(a) a Q(a) už jsme spočítali, zbývá nám s využitím Věty 7.21 spočítat $\det(P(a)^{15}.Q(a)^7)= \det(P(a))^{15}.\det(Q(a))^7 = a^{15}.(1-a)$sup>15.$(1-2a)^7$.

Nyní už snadno že, že matice P(a) je regulární, právě když a leží v **R**-{0, 1} a Q(a) je regulární, právě když a leží v **R**-{1/2} a $P(a)^{15}.Q(a)^7(a)$ je regulární, právě když a leží v **R**-{0, 1/2, 1}.

5. **Rozhodněte pro která x z tělesa Z_5 je matice A(x) singulární, jestliže.**

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}.$$

Opět nejprve spočítáme determinant A(x), nejprve přičteme třetí sloupec k druhému a pak rozvedeme podle třetího řádku:

$$\det \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3x+4 & 2x+1 \\ x+4 & 3x & 3 \\ x+1 & 0 & 4x \end{pmatrix} = (x+1).(4x^2+x+2) + 4x.(3x^2+4x+4) = x^3+x^2+4x+2.$$

Stejně jako v předchozí úloze potřebujeme najít x pro něž je hodnota $\det(A(x)) = x^3+x^2+4x+2 = 0$, což snadno zjistíme zkusmo:

$\det(A(0)) = 2$,
$\det(A(1)) = 1^3+1^2+4.1+2 = 3$,
$\det(A(2)) = 2^3+2^2+4.2+2 = 2$,
$\det(A(3)) = 3^3+3^2+4.3+2 = 0$,
$\det(A(4)) = 4^3+4^2+4.4+2 = 3$.

Zjistili jsme, že je matice A(x) singulární, právě když je x = 3.

9.12.

6. **Jestliže existuje, najděte nad R matici B^{-1}, kde**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Využijeme Větu 8.8 z přednášky a budeme elementárními úpravami upravovat matici (B|E) tak, abychom dostali matici (E|C). Pokud se nám to podaří, bude matice C právě inverzní maticí k matici B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $B^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 5 \\ 8 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. **Existuje-li, určete nad tělesem Z_7 matici A^{-1}, kde**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladě:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right).$$

Dostali jsme $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

10.12.

8. **Spočítejte součin reálných matic:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rozšíříme matici vlevo (pro níž potřebujeme určit inverz) o matici vpravo a vzniklou matici budeme v souladu s výše odvozenou metodou upravovat tak, abychom vlevo dostali jednotkovou matici. Potom vpravo bude hledaný součin:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 5 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 & 7 \\ -3 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

9. **Spočítejte součin reálných matic $B.A^{-1}$, pokud**

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Předně si uvědomme, že $(B.A^{-1})^T = (A^{-1})^T.B^T = (A^T)^{-1}.B^T$. Nyní už můžemem stejným způsobem jako v minulém příkladu určit součin $(A^T)^{-1}.B^T$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 12 & 8 & 8 & -4 & 4 \\ 12 & 9 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 0 & 18 & -27 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $(A^T)^{-1}.B^T = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 \\ -8 & 13 & 2 \end{pmatrix}$, a proto $B.A^{-1} = ((A^T)^{-1}.B^T)^T = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -9 & 13 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. **Najděte nad tělesem Z_7 adjungovanou matici k maticím**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Postupujme nejprve podle definice, na i-tém řádku a v j-tém sloupci adjungované matice se nachází determinant původní matice, v níž vyškrtneme j-tý řádek a i-tý sloupec, vynásobený hodnotou $(-1)^{i+j}$:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{adj}(B) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{adj}(C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U poslední matice, o níž z příkladu 2 víme, že je regulární, můžeme využít Věty 8.12, která říká, že $D.\mathrm{adj}(D) = \det(D).E$, proto $\mathrm{adj}(D) = \det(D).D^{-1}$, tedy

$$\mathrm{adj}(D) = 5.\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

16.12.

11. **Vyřešte nad reálnými čísly soustavu rovnic $Ax^T = (1,0,0)^T$ s reálným parametrem a pro matici**

$$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Pro počítání použijeme Cramerovo pravidlo. Nejdříve určíme det A = 2a(a+1). To znamená, že Cramerovo pravidlo můžeme využít pro parametr a z množiny **R**-{0, -1} (tj. je-li matice A regulární). Dále určíme determinant matic A_i, které vzniknou z matice A nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran $(1,0,0)^T$:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a, \quad \det\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & 2a \\ a & 0 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a, \quad \det\begin{pmatrix} 2a+1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2a.$$

Podle Cramerova pravidla spočítáme hodnotu i-té neznámé jako x_i = det A_i/det A. Tedy $x_1 = x_2$ = 2a/(2a(a+1)) = 1/(a+1) a x_3 = -2a/(2a(a+1)) = -1/(a+1).

Konečně standardním postupem zjistíme, že soustava pro a= -1 nemá řešení a pro a = 0 leží všechna řešení v množině (1,0,0) + < (0,1,-1) >.

12. **Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic s reálným parametrem a:**

```
      ax + (a+3)y = 2a+1
(2a-1)x + (2a+1)y = a
```

Budeme opět postupovat pomocí Cramerova pravidla. Nejprve tedy spočítáme determinant matice levých stran a determinanty matice levých stran s nahrazeným sloupcem:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a & a+3 \\ 2a-1 & 2a+1 \end{pmatrix} = 3-4a, \quad \det A_1 = \det\begin{pmatrix} 2a+1 & a+3 \\ a & 2a+1 \end{pmatrix} = 3a^2+a+1, \quad \det A_2 = \det\begin{pmatrix} a & 2a+1 \\ 2a-1 & a \end{pmatrix} = 1-3a^2.$$

Je-li a různé od 3/4, potom použitím Cramerova pravidla dostáváme x = $(3a^2+a+1)$/(3-4a) a y = $(1-3a^2)$/(3-4a). Konečně v případě, kdy x = 3/4 snadno zjistíme, že soustava nemá řešení.

Homomorfismy vektorových prostorů

1. **Uvažujme reálný vektorový prostor R[x] všech polynomů. Dokažte, že první derivace**

' tvoří homomorfismus R[x] do R[x]. Jak vypadá jádro Ker(')?

Tvrzení, že (p+q)' = p' + q' a (c.p)' = c.p' je dokázáno na přednášce matematické analýzy pro každou dvojici diferencovatelných funkcí p a q a každou reálnou konstantu c. Tedy první derivace je homomorfismus. Snadno nahlédneme, že Ker(') obsahuje právě všechnny konstantní funkce.

17.12.

2. **Nechť f je zobrazení Z_5^3 do Z_5^2 dané předpisem f(v) = vA. Rozhodněte, zda jde o homomorfismus, je-li**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Podle věty 4.7 z přednášky zobrazení dané násobením sloupcového vektoru (tedy matice nx1) maticí splňuje axiomy homomorfismu, tedy (**u**+**v**)A = **u**A+**v**A a (r.**u**).A = r.(**u**A).

3. **Pro homomorfismus f z předchozího příkladu popište podprostory Ker f a Im f.**

Připomeňme, že Ker f = {**v**| f(**v**)=**0**} = {**v**| A$\mathbf{v}^T$=**0**}. Tedy Ker f je právě množina všech řešení homogenní soustavy s maticí A. Snadno spočítáme, že Ker f = < (2,0,1) >.

Vezmeme-li libovolnou generující množinu G vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ (například kanonickou bázi), potom f(G) tvoří generující množinu podprostoru Im f = f($\mathbf{Z}_5^3$). Vidíme, že f((1,0,0)) = $(4,1)^T$, f((0,1,0)) = $(1,2)^T$ a f((0,0,1)) = $(2,3)^T$ (tj. obrazy vektorů kanonické báze tvoří právě sloupce matice A). Zbývá si všimnout, že

$$< (4,1)^T, (1,2)^T, (2,3)^T > = \mathbf{Z}_5^2.$$

4. **Najděte matici homomorfismus f vzhledem ke kanonickým bázím.**

Podle definice nejprve potřebujeme zjistit souřadnice vektorů f($\mathbf{e}_i$) vzhledem ke kanonické bázi:

$$\{f(\mathbf{e}_1)\}_{K2} = \{(4,1)\}_{K2} = (4,1),$$
$$\{f(\mathbf{e}_2)\}_{K2} = \{(1,2)\}_{K2} = (1,2),$$
$$\{f(\mathbf{e}_3)\}_{K2} = \{(2,3)\}_{K2} = (2,3).$$

Nyní zbývá souřadnicové vektory uspořádat do sloupců matice homomorfismu vzhledem ke kanonickým bázím $[f]_{K3\ K2} = A^T$ (tedy homomorfismus jsme měli de facto zadaný právě maticí vzhledem ke kanonickým bázím).

5. **Nechť g je zobrazení R^2 do R^3 určené předpisem $g((x_1,x_2)) = (x_1+2x_2,\ 4x_1-x_2,\ 3x_2)$. Dokažte, že se jedná o homomorfismus.**

Snadno zjistíme, že zobrazení lze vyjádřit jako součin matice a aritmetického vektoru, tedy jde (podle úvahy 2. příkladu) o homomorfismus:

$$g((x_1,x_2)) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} & & \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. **Najděte matici vzhledem ke kanonickým bázím homomorfismu g z předchozí úlohy a určete dimenze jádra a obrazu daného homomorfismu.**

Postupujeme stejně jako v 4. příkladu. Stačí tedy dosadit vektory kanonické báze do g a seřadíme je do sloupců matice:

$$[g]_{K2\ K3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Snadno nahlédneme, že matice $[g]_{K2\ K3}$ hodnost 2, proto soustava s maticí $[g]_{K2\ K3}$ má nulovou množinu řešení, tedy Ker g je nulový prostor. Využijeme-li nyní Větu 9.27, dostáváme, že dim(Im g) = dim($\mathbf{R}^2$) - dim(Ker g) = 2-0 = 2.

7. **Spočítejte matice $[g]_{B\ K3}$ a $[g]_{BC}$ pro homomorfismus g z předchozách dvou příkladů, je-li B = ((1,2), (1,1)) a C = ((1,1,1), (1,0,0), (1,1,0)).**

Matici $[g]_{B\ K3}$ můžeme určit přímo z definice, neboť g((1,2)) = $\{g((1,2))\}_{K3}$ = (5,2,6) g((1,1)) = $\{g((1,1))\}_{K3}$ = (3,3,3)

$$[g]_{B\ K3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Použijeme-li Věty 10.6 a 10.14 z přednášky, dostaneme $[g]_{B\ C} = [1.g]_{B\ C} = [1]_{K3\ C} \cdot [g]_{B\ K3} = [1]_{C\ K3}^{-1} \cdot [g]_{B\ K3}$, kde 1 značí identický homomorfismus (bez ohledu na vektorový prostor na němž operuje). Matici přechodu $[1]_{C\ K3}$ od kanonické báze k bázi C přitom najdeme velmi snadno, tak, že do sloupců sepíšeme vektory báze C. Zbývá nám tedy dopočítat:

$$[g]_{B\ C} = [1]_{C\ K3}^{-1} \cdot [g]_{B\ K3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

6./7.1.

8. **Mějme A=((1,4), (3,1)) bázi prostoru Z_7^2 a B=((1,1,2), (1,0,3), (6,0,5)) bázi prostoru Z_7^3. Najděte matici homomorfismu h vzhledem k bázím A a B vektorového prostoru Z_7^2 do vektorového prostoru Z_7^3, známe-li matici h vzhledem ke kanonickým bázím**

$$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{matrix}$$

$[h]_{K2\ K3} = \begin{pmatrix} 2\ 6 \end{pmatrix}$

Dvojí aplikací Věty 10.6 z přednášky můžeme vyjádřit hledanou matici $[h]_{AB}$ jakou součin matic:

$$[h]_{AB} = [1]_{K3\ B}\ [h]_{A\ K3} = [1]_{K3\ B}\ [h]_{K2\ K3}\ [1]_{A\ K2},$$

kde 1 označuje identický homomorfismus bez ohledu na nosný vektorový prostor. Snadno určíme přímo podle definice matice přechodu od kanonické báze k bázi A resp. B (tj. do sloupečků sepíšeme bázi A resp. B):

$$[1]_{A\ K2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad [1]_{B\ K3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Konečně zbývá uvážit, že $[1]_{B\ K3}\ [1]_{S3\ B} = I_3$, tedy $[1]_{K3\ B} = [1]_{B\ K3}{}^{-1}$. Dokončení úlohy už je jen rutinním počítáním s maticemi:

$$[h]_{A\ B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hledaný součin matic dopočítáme obvyklým způsobem:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $[h]_{A\ B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

9. **Najděte vektor F((1,0,2)) pro homomorfismsus F aritmetického vektorového prostoru $Z_3{}^3$ do aritmetického vektorového prostoru $Z_3{}^2$ daný maticí vzhledem k bázím A = ((1,1,1), (1,0,1), (1,1,0)), B = ((1,2), (1,1)):**

$[F]_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Víme-li, že souřadnice vektoru F((1,0,2)) vzhledem k bázi B dostaneme jako součin

$$[F((1,0,2)]_B = [(1,0,2)]_A\ [F]_{A\ B}{}^T,$$

stačí nám najít souřadnice $[(1,0,2)]_A = (1,1,2)$, tedy $[F((1,0,2))]_B = (2,2)$. Konečně dopočítáme, že

F((1,0,2) = 2.(1,2) + 2.(1,1) = (1,0).

10. **Najděte maticí vzhledem ke kanonickým bázím homomorfismu F z předchozího příkladu.**

Postupujeme standardním cestou s využitím Věty 10.6 (či speciální Věty 10.13):

$$[F]_{K3\,K2} = [1]_{B\,K2}.[F]_{A\,B}.[1]_{K3\,A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. **Rozhodněte, zda existuje homomorfismus g (a zda je případně určen jednoznačně) aritmetického vektorového prostoru Z_7^3 do Z_7^4 splňující podmínky:**
a) g((1,3,1)) = (0,2,1,0), g((5,6,0)) = (1,1,1,5) a g((1,1,0)) = (3,4,6,0).
b) g((1,3,1)) = (0,2,1,0), g((5,6,0)) = (1,1,1,5) a g((3,3,2)) = (4,4,5,2).
c) g((1,3,1)) = (0,2,1,0), g((5,6,0)) = (1,1,1,5) a g((3,3,2)) = (3,0,5,1).

a) Všimněme si, že posloupnost ((1,3,1), (5,6,0), (1,1,0)) tvoří bázi $\mathbf{Z}_7^3$. Aplikujeme-li Větu 9.22, zjišťujeme, že homorfismus rozšiřující zobrazení na bázi existuje právě jeden, tedy homomorfismus g splňující dané podmínky existuje a je určen jednoznačně.

b) Tentokrát obvyklým způsobem nahlédneme, že posloupnost vektorů ((1,3,1), (5,6,0), (3,3,2)) je lineárně závislá, konkrétně (3,3,2) = 2.(1,3,1)+3.(5,6,0). Kdyby existoval homomorfismus s požadovanými vlastnostmi, muselo by (podle definice) platit:

(4,4,5,2) = g((3,3,2)) = g(2.(1,3,1)+3.(5,6,0)) = 2.g((1,3,1)) + 3.g((5,6,0)) = 2.(0,2,1,0) + 3.(1,1,1,5) = (3,0,5,1).

To samozřejmě neplatí, proto takový homomorfismus g neexistuje.

c) Nyní vidíme, že posloupnost ((1,3,1), (5,6,0)) je lineárně nezávislá a podmínka g((3,3,2)) = g(2.(1,3,1)+3.(5,6,0)) = 2.(0,2,1,0)+3.(1,1,1,5) = (3,0,5,1) je splněna, tedy podmínka g((3,3,2)) = (3,0,5,1) plyne z prvních dvou podmínek a z toho, že g má být homomorfismus. Doplníme-li nyní posloupnost ((1,3,1), (5,6,0)) na bázi B například vektorem (1,0,0) a vektor (1,0,0) zobrazíme na libovolný vektor (a,b,c,d) prostoru $\mathbf{Z}_7^4$, pak podle Věty 9.22 existuje (právě jeden) homomorfismus g splňující dané podmínky. Homomorfismus splňující původní podmínky tedy určen jednoznačně není: vidíme, že existuje právě 7^4 takových homomorfismů.

12. **Najděte matici endomorfismus f vektorového prostoru R^2 vzhledem ke kanonické bázi, víte-li, že f((1,2)) = (3,0) a f((2,1)) = (3,3).**

Protože B=((1,2), (2,1)) tvoří bázi $\mathbf{R}^2$, víme, že daná podmínka určuje homomorfismus f jednoznačně a přímo z definice dostaneme matici

$$[f]_{B\,K2} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Dále postupujeme obvyklým způsobem, tj.

3 3 1 2 -1 1 1

$$[f]_{K2} = [f]_{K2\,K2} = [f]_{B\,K2} \cdot [1]_{K2\,B} = [f]_{B\,K2} \cdot [1]_{B\,K2}^{-1} = \begin{pmatrix} 0\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ -1 \end{pmatrix}.$$

13. **Najděte matici ve vektorovém prostoru Z_3^2 matici přechodu od báze M = ((2,1), (1,1)) k bázi N = ((1,1), (0,1))**

Uvědomíme si, že matice přechodu od báze M k bázi N je právě maticí $[1]_{NM}$ identického homomorfismu vzhledem k bázím N a M. Nyní opět použíjeme Větu 5.6, abychom dostali:

$$[1]_{NM} = [1]_{K2\,M} \cdot [1]_{N\,K2} = [1]_{K2\,M}^{-1} \cdot [1]_{N\,K2} = = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

14. **Mějme f homomorfismus vektorového prostoru Z_3^3 do vektorového prostoru Z_3^2 a g homomorfismus Z_3^2 do Z_3^2 vše nad tělesem Z_3. Označme báze A = ((1,1,1), (1,0,1), (1,1,0)), B = ((1,2), (1,1)), K_2 kanonickou bázi Z_3^2 a K_3 kanonickou bázi Z_3^3. Určete matici $[gf]_{K3\ K2}$ homomorfismu gf vzhledem k bázím K_3 a K_2, víte-li, že**

$$[f]_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [g]_{K2\ K2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Při počítání několikrát využijeme větu o matici složeného lineárního zobrazení (10.6):

$$[gf]_{K3\,K2} = [g]_{K2\,K2}\,[f]_{K3\,K2} = [g]_{K2\,K2}\,[1]_{B\,K2}\,[f]_{A\,B}\,[1]_{K3\,A}.$$

Matice $[g]_{K2\ K2}$ i $[f]_{A\ B}$ přitom známe a matice přechodu od kanonické báze k bázi A resp. B zjistíme velmi snadno (souřadnice jednotlivých bázických vektorů vzhledem ke kanonické bázi, tj. přímo dané aritmetické vektory, umístíme do sloupců matice přechodu):

$$[1]_{B\,K2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad [1]_{A\,K3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uvážíme-li nakonec, že $[1]_{K3\,A} = [1]_{A\,K3}^{-1}$, zbývá nám dopočítat součin matic:

$$[gf]_{K3\,K2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Spočítali jsme, že $[gf]_{K3\,K2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13./14.1.

Lineární formy

1. **Dokažte, že zobrazení f ze Z_7^4 do Z_7 definované předpisem $f((x_1,x_2,x_3,x_4)) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_4$ a najděte souřadnice f vzhledem ke standardní bázi a vzhledem k bázi B = ((1,1,1,1), (2,0,2,2), (1,1,0,1), (4,4,4,0)).**

   Neboť f(**v**) dostaneme jako součin vektoru **v** a sloupcového vektoru $(2,3,0,4)^T$, jdo o homomorfismus vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^4$ do $\mathbf{Z}_7^1=\mathbf{Z}_7$, tj. (přímo podle definice) jde o lineární formu na prostoru $\mathbf{Z}_7^4$.

   Souřadnice f vzhledem k jakékoli bázi dostaneme dosazením jednotlivých bázických vektorů a jejich seřazením do řádku, tedy

   $$\{f\}_{K4} = (2,3,0,4) \text{ a } \{f\}_B = [f]_{B(1)} = (2,5,2,6).$$

2. **Najděte duální bázi ke kanonické bazi K_4 vektorového prostoru Z_7^4 (určete analytické vyjádření příslušných lineárních forem).**

   Označme (f_1, f_2, f_3, f_4) hledanou duální bázi. Z definice víme, že $f_i(\mathbf{e}_j) = 0$, je-li i různé od j, a $f_i(\mathbf{e}_i)= 1$. Snadno nahlédneme, že takovou podmínku splňují právě lineární formy $f_i((x_1,x_2,x_3,x_4)) = x_i$.

3. **Najděte souřadnice lineární formy f chápané jako vektor duálního vektorového prostoru vzhledem duální bázi ke kanonické bazi a vzhledem k duální bázi k bázi B, kde f a B bereme z 1. příkladu.**

   Označme K_4^*, respektive B^* duální báze k bázím K_4 a B. Nejprve přímo podle definice a předchozí úlohy vidíme, že $\{f\}_{K4*} = (2,3,0,4)$. Využijeme-li dále Větu 11.7 z přednášky, pak snadno určíme souřadnice lineární formy vzhledem k duální bázi B^* bez toho, že bychom B^* museli hledat, neboť platí $\{f\}_{B*} = \{f\}_B = (2,5,2,6)$.

4. **Mějme bázi B=((1,0,1), (3,2,2), (2,0,4)) vektorového prostoru Z_5^3. Určete analytické vyjádření lineárních forem duální báze k bázi B.**

   Potřebujeme najít souřadnice linárních forem duální báze vzhledem ke kanonické bázi, z nichž už snadno dostaneme analytický tvar. Označme $B^*=(f_1, f_2, f_3)$ duální bázi k bázi B a souřadnice forem:

   $$\{f_i\}_{K3} = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}).$$

   Uvědomme si, že požadavek na duální bazi lze v maticovém zápisu vyjádřit následovně:

   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Hledáme tedy obvyklým způsobem inverzní matici ke známé matici, snadno spočítáme, že

$$\begin{pmatrix} \{f_1\}_{K3} \\ \{f_2\}_{K3} \\ \{f_3\}_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 3\ 2 \\ 0\ 2\ 0 \\ 1\ 2\ 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2\ 3\ 4 \\ 0\ 3\ 0 \\ 2\ 4\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zbývá sepsat analytické vyjádření forem: $f_1(x,y,z) = 2x+3y+ 4z$, $f_2(x,y,z) = 3y$, $f_3(x,y,z) = 2x+4y+3z$.

5. **Mějme bázi M=((1,-1), (-1,2)) aritmetického vektorového prostoru R^2. Najděte souřadnice vzhledem k M a vzhledem ke kanonické bázi lineárních forem duální báze k bázi M.**

Označme $M^*=(g_1, g_2)$ duální bázi k bázi M. Okamžitě z definice vidíme, že $\{g_1\}_M = (1,0)$ a $\{g_2\}_M = (0,2)$ (tedy souřadnice jsou právě vektory kanonické báze).

Při hledání souřadnic $\{g_i\}_{K2}$ můžeme postupovat stejně jako v předchozím příkladu nebo podle Věty 11.9. V obou případech nám zbývá najít inverzní matici:

$$\begin{pmatrix} \{g_1\}_{K2} \\ \{g_2\}_{K2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2\ 1 \\ 1\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\{g_1\}_{K2} = (2,1)$ a $\{g_2\}_{K2} = (1,1)$.

6. **Uvažujme $h_1(x) = 4x_2+4x_3$, a $h_2(x) = 4x_1+2x_2+x_3$ $h_3(x) = 3x_1+3x_2$ lineární formy na vektorovém prostoru Z_5^3. Ověřte, že (h_1, h_2, h_3) tvoří bázi duálního vektorového prostoru, a najděte bázi B prostoru Z_5^3 tak, aby (h_1, h_2, h_3) byla duální bází k bázi B.**

Řešíme duální úlohu k předchozím dvěma příkladům. Známe tentokrát souřadnice lineárních forem vzhledem ke kanonické bázi a potřebujeme najít vektory $\mathbf{u}_i$ tak, aby součin $\mathbf{u}_i\{g_j\}_{K3}^T$ byl roven 0 (pro i různé) od j nebo 1 (pro i=j), což snadno vyjádříme pomocí matic:

$$\begin{pmatrix} \{\mathbf{u}_1\}_{K3} \\ \{\mathbf{u}_2\}_{K3} \\ \{\mathbf{u}_3\}_{K3} \end{pmatrix} (\{g_1\}_{K3}^T | \{g_2\}_{K3}^T | \{g_3\}_{K3}^T) = \begin{pmatrix} \{\mathbf{u}_1\}_{K3} \\ \{\mathbf{u}_2\}_{K3} \\ \{\mathbf{u}_3\}_{K3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\ 4\ 3 \\ 4\ 2\ 3 \\ 4\ 1\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy opět se úkol redukuje na nalezení inverzní matice. Navíc teprve při hledání inverzní matice můžeme zodpovědět otázku existence báze B, pokud by neexistovala inverzní matice k dané matici (tj. pokud by souřadnice lineárních forem h_i byly lineárně závislé), pak by lineární formy h_i netvořili bázi, v opačném případě bází budou. Dopočítáme tedy:

$$\begin{pmatrix} \{\mathbf{u}_1\}_{K3} \\ \{\mathbf{u}_2\}_{K3} \\ \{\mathbf{u}_3\}_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\ 4\ 3 \\ 4\ 2\ 3 \\ 4\ 1\ 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2\ 3\ 1 \\ 2\ 3\ 2 \\ 1\ 1\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $\mathbf{u}_1 = (2,3,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3,2)$ a $\mathbf{u}_3 = (1,1,4)$ a (h_1, h_2, h_3) je duální bází vzhledem k bázi

$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

17.3./19.3.

Skalární součin

1. **Zjistěte, zda je skalárním součinem zobrazení f z $R^2 x R^2$ do reálných čísel určené předpisem $f((x_1,x_2), (y_1,y_2)) = 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$.**

   Nad reálným vektorovým prostorem potřebujeme zjistit, zda je f pozitivně definitní symetrická bilineární forma. Snadno nahlédneme, že se jedná o bilineární formu s maticí

$$[f]_{K2} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Tedy vidíme, že $[f]_{K2}$ je symetrická matice, proto je f symetrická bilineární forma. Zbývá standardním postupem určit její signaturu:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_{sym} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Zjistili jsme, že f je pozitivně definitní symetrická bilineární forma, tedy jde o skalární součin.

2. **Najděte nějakou ortonormální bázi vektorového prostoru R^2 vzhledem ke skalárnímu součinu f z předchozího příkladu.**

   Připomeňme, že B je ortonormální báze právě tehdy, když je $[f]_B$ jednotková matice. Hledáme tedy takovou polární bázi vzhledem k f, že f(**v**, **v**) = 1 pro každý vektor **v** z báze B. Budeme tedy opět upravovat posloupností symetrických úprav matici $[f]_{K2}$ tentokrát tak, abychom dostali jednotkovou matici. Řádkové úpravy budeme obvyklým způsobem zaznamenávat do matice:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{sym} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{sym} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

   Našli jsme ortonormální bázi B = ((1/2, 1/2), (0,1)).

3. **Najděte unitární zobrazení unitárního prostoru (R^2, f) do unitárního prostoru (R^2, w), kde f je skalární součin z předchzích dvou příkladů a w je skalární součin z Poznámky 14.2 z přednášky (tzv. standardní skalární součin).**

   Protože jsme v druhém příkladu našli ortonormální bázi B = ((1/2, 1/2), (0,1)) vzhledem ke skalárnímu součinu f, dostaneme jako hledané unitární zobrazení podle Věty 14.18 izomorfismus F(**v**) = $\{\mathbf{v}\}_B$.

4. **Ověřte, že je zobrazení g z $R^3 x R^3$ do R skalárním součinem, je-li dané předpisem**

$g((x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + 5x_3y_3 - x_3y_1 + x_3y_2$ a najděte nějakou jeho ortonormální bázi.

Nad reálným vektorovým prostorem potřebujeme zjistit, zda je f pozitivně definitní symetrická bilineární forma. Snadno nahlédneme, že se jedná o bilineární formu s maticí

$$[f]_{K2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tedy vidíme, že $[f]_{K2}$ je symetrická matice, proto je f symetrická bilineární forma. Zbývá standardním postupem určit její signaturu a najít takovou polární bázi M, vůči níž je matice f právě jednotková:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{sym} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{sym} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{sym} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right).$$

Ověřili jsme, že f je skalární součin s ortonormální bází M = (1,0,0), (1,1,0), (1/2,0,1/2)).

5. **Nechť B = ((1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)) je ortonormální báze vzhledem ke skalárnímu součinu h na R^3. Určete matici skalárního součinu h vzhledem ke kanonické bázi.**

Podle předpokladů $[h]_B = E$. Pomocí Věty 12.3 spočítáme $[h]_{K3}$ (inverzní matice určíme obvyklým algoritmem):

$$[h]_{K3} = [Id]_{K3B}{}^T[h]_B[Id]_{K3B} = ([Id]_{BK3}{}^T)^{-1}([Id]_{BK3})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = 1/4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

24.3./26.3.

6. **Buď w standardní skalární součin na vektorovém prostoru R^3 a V = < (1,1,0), (1,3,2) >. Najděte nějakou ortonormální bázi V.**

Budeme upravovat bázi (1,1,0), (1,3,2) Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací (viz Věta 14.8). Položíme nejprve $\mathbf{v}_1$ = (1,1,0)/||(1,1,0)|| = (1/V2, 1/V2, 0). Dále hledáme vektor $\mathbf{u}_2$ ve tvaru $\mathbf{u}_2$ = (1,3,2) + c.$\mathbf{v}_1$. Z podmínky w($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$) = 0 dostáváme, že a = - w((1/V2, 1/V2, 0), (1,3,2)) = -4/V2, proto $\mathbf{u}_2$ = (-1,1,2). Nyní vektor $\mathbf{u}_2$ normalizujeme a dostanme $\mathbf{v}_1$ = (-1,1,2)/||(-1,1,2)|| = (-1/V6,1/V6,V2/V3).

Hledanou ortonormální bází je tedy posloupnost ((1/V2, 1/V2, 0), (-1/V6,1/V6,V2/V3)).

7. **Nechť V je podprostor reálného vektorového prostoru R^4 se standardním skalárním součinem w. generovaný vektory (1,1,-2,1), (2,0,1,0), (0,1,0,1). Najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru V.**

Nejprve zvolíme vhodnou bázi prostoru V = < (1,1,-2,1), (2,0,1,0), (0,1,0,1) >, kterou budeme ortogonalizovat ("ortonormalizovat") pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace. Vektor (2,0,1,0) je zřejmě kolmý na zbývající vektory, zvolme tedy bázi V, tak aby byl vektor (2,0,1,0) na jejím prvním místě (čímž si ušetříme práci s počítáním skalárních součinů). Tedy ortogonalizujme bázi ((2,0,1,0), (0,1,0,1), (1,1,-2,1)). Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci tentokrát mírně modifikujeme: najdeme nejprve ortogonální bázi a tu budeme normalizovat až na závěr.

Neboť jsme si už všimli, že w((2,0,1,0), (0,1,0,1))=0, tedy máme první dva (zatím jen ortogonální, nikoli ortonormální) vektory hledané báze: $\mathbf{v}_1'$ = (2,0,1,0), $\mathbf{v}_2'$ = (0,1,0,1). Nyní budeme hledat třetí bázický vektor ve tvaru $\mathbf{v}_3'$ = (1,1,-2,1) - a.$\mathbf{v}_1'$ - b.$\mathbf{v}_2'$. Přitom má splňovat podmínky, že w($\mathbf{v}_i'$, $\mathbf{v}_3'$) = 0 pro i=1,2, z čehož (využitím linearity skalárního součinu v druhé složce) dostáváme, že

a = w((1,1,-2,1), (2,0,1,0)) / w((2,0,1,0), (2,0,1,0)) = 0,
b = w((1,1,-2,1), (0,1,0,1)) / w((0,1,0,1), (0,1,0,1)) = - w((1,1,-2,1), (0,1,0,1)) / $\|(0,1,0,1)^T\|^2$ = -1.

Všimněme si, že koeficient je roven 0 díky volbě vektoru $\mathbf{v}_1'$ kolmého na všechny následující vektory, tedy stačilo ným hledat ortogonální bázi podprostoru < (1,1,-2,1), (0,1,0,1) >, která musí být kolmá na vektor (2,0,1,0). Tedy $\mathbf{v}_3'$ = (1,1,-2,1) - (0,1,0,1) = (1,0,-2,0) je posledním hledaným kolmým vektorem. Posloupnost vektorů ((2,0,1,0), (0,1,0,1), (1,0,-2,0)) tvoří zřejmě ortogonální bázi prostoru V. Zbývá nám jednotlivé vektory normalizovat:

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' / \|\mathbf{v}_1'\|$ = 1/V5.(2,0,1,0),
$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2' / \|\mathbf{v}_2'\|$ = 1/V2(0,1,0,1),
$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3' / \|\mathbf{v}_3'\|$ = 1/V5.(1,0,-2,0).

Ortonormální bází je tedy například posloupnost vektorů (1/V5.(2,0,1,0), 1/V2(0,1,0,1), 1/V5.(1,0,-2,0)).

8. **Buď w standardní skalární součinu na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$. Najděte nějakou bázi ortogonálního doplňku U' k podprostoru U = < (1,2,1,1,1), (0,-1,1,1,2) >.**

Připomeňme, že U' = {**v** z $\mathbf{R}^5$| w(**u**, **v**) = 0 pro všechna **u** z U} = {**v** z $\mathbf{R}^5$| w(**b**, **v**) = 0 pro všechna **b** z B}, kde B je nějaká báze U. Snadno uvážíme, že potřebujeme najít právě řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tedy bázi U' tvoří například vektory (-3,1,1,0,0), (-3,1,0,1,0), (-5,2,0,0,1).

9. **Mějme w standardní skalární součinu na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$. Najděte nějakou ortogonální bázi prostoru U = < (1,1,0,1), (1,0,1,1) > a ortogonální bázi ortogonálního doplňku U' prostoru U.**

Můžeme postupovat několika způsoby. Jednak můžeme doplnit vektory (1,1,0,1), (1,0,1,1) na bázi celého prostoru $\mathbf{R}^4$ (například vektory (1,0,0,0) a (0,1,0,0)) a tuto bázi upravit Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. První dva vektory ortogonalizované báze budou přitom tvořit ortogonální bázi U, další dva vektory budou tvořit ortogonální bázi doplňku U'.

Rovněž nám stačí najít libovolnou bázi U' (například týmž postupem jako v předchozím příkladu) a obě báze ortogonalizovat. Postupujme druhým způsobem: Bázi U' tvoří například posloupnost (-1,1,1,0), (0,1,1,-1). Vektor (0,1,1,-1) můžeme upravit jedním krokem Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace:

$$(0,1,1,-1) - [W((-1,1,1,0), (0,1,1,-1))/ 3].(-1,1,1,0) = 1/3. (2,1,1,-3)$$

Zřejmě tedy (-1,1,1,0) a (2,1,1,-3) tvoří ortogonální bázi U'.

Obdobně (1,1,0,1), (1,-2,3,1) tvoří ortogonální bázi U.

10. **Najděte souřadnice vektoru (1,2,1) vůči ortonormální bázi M = ((1/V2,1/V2,0), (0,0,1), (1/V2,-1/V2,0)) vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu .**

Hledáme-li souřadnice (a_1, a_2, a_3) vzhledem k ortonormální bázi $M = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$,

$$\text{tj. } (1,2,1) = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3,$$

můžeme si uvědomit, že $w((1,2,1), \mathbf{u}_i) = a_i w(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = a_i$. Tedy stačí, abychom spočetli skalární součiny $a_i = w((1,2,1), \mathbf{u}_i)$:

$$a_1 = w((1,2,1), (1/V2,1/V2,0)) = 3/V2, \quad a_2 = w((1,2,1), (0,0,1)) = 1, \quad a_3 = w((1,2,1), (1/V2,-1/V2,0)) = -1/V2.$$

Spočítali jsme, že $\{(1,2,1)\}_M = (3/V2, 1, -1/V2)$.

31.3./2.4.

11. **Najděte ortogonální projekci vektoru (2,4,3) na podprostor V prostoru R^3 se standardním skalárním součinem w generovaný vektory (1,3,-2) a (1,1,-1), tj. vektor v z V, pro který platí, že (2,4,3)-v leží v ortogonálním doplňku V.**

Náš úkol můžeme interpretovat tak, že hledáme takovou lineární kombinaci a(1,3,-2)+b(1,1,-1), aby byl vektor (2,4,3)-a(1,3,-2)-b(1,1,-1) kolmý na prostor V= < (1,3,-2) ,(1,1,-1) >. To můžeme ekvivalentně vyjádřit tak, že vektor (2,4,3)-a(1,3,-2)-b(1,1,-1) je kolmý na vektor (1,3,-2) i (1,1,-1) a odtud dostáváme soustavu rovnic

$$w((1,3,-2) , (2,4,3)-a(1,3,-2)-b(1,1,-1)) = w((1,3,-2) , (2,4,3)) - a.w((1,3,-2) , (1,3,-2)) - b.w((1,3,-2) , (1,1,-1)) = 0$$
$$w((1,1,-1) , (2,4,3)-a(1,3,-2)-b(1,1,-1)) = w((1,1,-1) , (2,4,3)) - a.w((1,1,-1) , (1,3,-2)) - b.w((1,1,-1) , (1,1,-1)) = 0.$$

Tuto nehomogenní soustavu rovnic sepíšeme do matice a vyřešíme (její matice se často nazývá Gramovou maticí):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Snadno zjistíme, že a = 1 a b = -1, tedy ortogonální projekce vektoru (2,4,3) na podprostor V je (1,3,-2) - (1,1,-1) = (0,2,-1)

12. **Najděte ortogonální projekci vektoru (2,1,3,0) na podprostor U = <**

(1/V2,0,0,1/V2), (0,0,1,0), (0,1,0,0) > prostoru R^4 se standardním skalárním součinem w.

Označme $\mathbf{u}_1$ = (1/V2,0,0,1/V2), $\mathbf{u}_2$ = (0,0,1,0), $\mathbf{u}_3$ = (0,1,0,0) a $\mathbf{v}$ = (2,1,3,0). Všimněme si, že ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$) tvoří ortonormální bázi prostoru U. Hledáme-li stejnou metodou jako v předchozí úloze x_1, x_2, x_3 tak, aby $\mathbf{v}$ - ($x_1\mathbf{u}_1$ + $x_2\mathbf{u}_3$ + $x_3\mathbf{u}_3$) bylo kolmé na všechny vektory $\mathbf{u}_i$, kde i = 1,2,3, pak dostáváme, že x_i = w($\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}$). Tedy zbývá dopočítat ortogonální projekci:

$$w(\mathbf{u}_1, \mathbf{v})\,\mathbf{u}_1 + w(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})\,\mathbf{u}_3 + w(\mathbf{u}_3, \mathbf{v})\,\mathbf{u}_3 = (1,0,0,1) + (0,0,3,0) + (0,1,0,0) = (1,1,3,1)$$

13. **Najděte vektor u z U a u' z ortogonálního doplňku U tak, aby (1,2,4) = u + u', je-li U = < (1,2,1), (2,1,-1) > podprostor vektorového prostoru R^3 se standardním skalárním součinem w.**

Postupujeme obdobně jako v prvním příkladě. Tedy nejprve najdeme taková reálná x a y, aby (1,2,4) - x.(1,2,1) - y.(2,1,-1) bylo kolmé na podprostor U, což vede k řešení nehomogenní soustavy s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} w((1,2,1),(1,2,1)) & w((1,2,1),(2,1,-1)) & w((1,2,1),(1,2,4)) \\ w((2,1,-1),(1,2,1)) & w((2,1,-1),(2,1,-1)) & w((2,1,-1),(1,2,4)) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Snadno spočítáme, že x = 2 a y = -1 a ortogonální projekce vektoru (1,2,4) na podprostor U je $\mathbf{u}$ = 2.(1,2,1) - 1.(2,1,-1) = (0,3,3) a $\mathbf{u}'$ = (1,2,4) - (0,3,3) = (1,-1,1).

Vlastní čísla a vlastní vektory

1. **Najděte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory lineárního operátoru F na reálném vektorovém prostoru R^2 s maticí vzhledem ke kanonické bázi K_2:**

$$[F]_{K2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Potřebujeme zjistit, pro která reálná x (vlastní čísla) existuje nenulový vektor $\mathbf{v}$ (vlastní vektor) tak, že F($\mathbf{v}$) = x$\mathbf{v}$. To můžeme ekvivalentně vyjádřit ve tvaru (F-x.Id)($\mathbf{v}$) = $\mathbf{0}$, a v maticovém zápisu pro libovolnou bázi B prostoru $\mathbf{R}^2$ ve tvaru

$$([F]_B - x.E)\,\{\mathbf{v}\}_B{}^T = [(F-x.Id)]_B\{\mathbf{v}\}_B{}^T = \{\mathbf{0}\}_B{}^T = (0,0)^T.$$

Hledáme tedy všechna taková x z $\mathbf{R}$, pro něž existuje netriviální řešení homogenní soustavy rovnic se čtvercovou maticí $[(F\text{-}x.Id)]_B$. To nastává právě tehdy, když je matice $[F]_B$ - x.E = $[(F\text{-}x.Id)]_B$ singulární. Spočítáme tedy nejprve vlastní čísla matice lineárního operátoru vzhledem k nějaké pevně zvolené bázi (při tom nezáleží na volbě báze, ale je důležité, abychom počítali s maticí lineárního operátoru, tj. s maticí daného lineárního zobrazení vzhledem k stejné bázi v definičním oboru i oboru hodnot), v tomto případě je nejjednodušší vzít matici $[F]_{K2}$.

Určíme charkteristický polynom matice det($[F]_{K2}$-xE)= (3-x)(6-x)-4 = x^2-9x+14 = (x-2)(x-7). Vlastní čísla matice $[F]_{K2}$ jsou tedy právě kořeny charakteristického polynomu 2 a 7. Dále budeme postupně dosazovat do matice $[F]_{K2}$-xE vypočtená vlastní čísla a budeme hledat vlastní vektory matice $[F]_{S2}$, tedy nenulová řešení homogenních soustav rovnic s maticemi, která tvoří právě souřadnicové vektory vlastních vektorů operátoru F:

$$[F]_{K2} - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad [F]_{K2} - 7E = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Snadno zjistíme, že všechny nenulové násobky vektoru $(-2,1)^T$ jsou vlastními vektory matice $[F]_{K2}$ příslušnými vlastnímu číslu 2 a všechny nenulové násobky vektoru (1,2) jsou vlastními vektory matice $[F]_{K2}$ příslušnými vlastnímu číslu 7.

Konečně máme-li spočítané souřadnice vlastních vektorů $[\mathbf{v}]_{K2}$ vzhledem ke kanonické bázi, okamžitě vidíme, že množinu všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2 tvoří < (-2,1) > - {(0,0)} a množinu všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 7 tvoří <(1,2) > - {(0,0)}.

7.4./9.4.

2. **Najděte nad tělesem Z_5 všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice**

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nejprve hledáme kořeny polynomu (nad $\mathbf{Z}_5$) p(x) = det($[G]_{S3}$-xI_n) = $4x^3+4x^2+2$. Prostým dosazením, zjistíme, že p(1)=0 a p(2)=0, tedy vlastní čísla operátoru H jsou právě 1 a 2. Dále opět řešíme homogenní soustavy rovnic s maticí M-1I_n a M-2I_n:

$$M\text{-}1E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M\text{-}2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zřejmě například vektory (1,0,1) a (0,1,0) tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1 a vektor (1,3,4) tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2.

3. **Nechť H je endomorfismus na vektorové prostoru R^3 nad tělesem reálných čísel daný předpisem H(x,y,z) = (x+2y+z, 2x-y+2z, -2y). Najděte všechna vlastní čísla a podprostory generované vlastními vektory endomorfismu H.**

S pomocí Věty 15.9 nahlédneme, že potřebujeme najít právě vlastní čísla a vlastní vektory matice endomorfismu vzhledem ke kanonické bázi. Nejprve tedy určíme matici

$$[H]_{K3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní spočítáme obvyklým způsobem vlastní čísla matice $[H]_{K3}$ (a tedy i endomorfismu H), tj. kořeny polynomu $\det([H]_{K3}-xI_n) = -x(x+1)(x-1)$. Máme tři různá vlastní čísla 0, 1 a -1 na prostoru dimenze 3, to znamená.

Zbývá nám najít vlastní vektory tj. všechna nenulová řešení homogenních soustav s maticemi:

$$[H]_{K3} - 0E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad [H]_{K3} - 1E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad [H]_{K3} + 1E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Každá z množin řešení je jednodimenzionální, tedy položíme-li $U_x = \langle (1,0,-1) \rangle$, $U_{-1} = \langle (3,1,-2) \rangle$ a $U_1 = \langle (-2,1,2) \rangle$, pak platí, že že $H(u) = x.u$ pro všechna u z U_x a všechna vlastní čísla x.

4. **Uvažujme endomorfismus H z předchozího příkladu. Najděte bázi B, vůči níž ma endomorfismus H diagonální matici.**

Všimněme si, že vlastní vektory (1,0,-1), (3,1,-2), (-2,1,2) jsou lineárně nezávislé vektory a proto tvoří bázi bázi, položme B = ((1,0,-1), (3,1,-2), (-2,1,2)). Nyní zbývá nahlédnout, že

$$[H]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tj. matice $[H]_B$ vůči bázi složené z vlastních vektorů je diagonální.

Následující téma