Algebra II. - Bilineárne a kvadratické formy

(A) Rozhodněte, jestli dané zobrazení β_i je bilineárni forma. Pokud ano
určete také jestli je symetrická / antisymetrická
\+ nalezněte její matici při zadané bázi E_i. (pokud báze není určena, myslí se kanonická)

1. $\beta_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
   $\beta_1(u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3$

2. $\beta_2 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$
   $\beta_2(u, v) = -2u_1v_2 + u_2v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_4 - u_4v_3$

3. $\beta_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
   $\beta_3(u, v) = u_1v_2 + 2u_1v_3 - u_2v_1 + 3u_2v_3 - 2u_3v_1 - 3u_3v_2$

4. $\beta_4 : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R} \quad , \quad E_4 = \{1, x, x^2\},$ kde $\mathbb{P}_2$ je prostor polynomů 2. stupně.
   $\beta_4(p, q) = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$

5. $\beta_5 : G \times G \to \mathbb{R} \quad , \quad E_5 = \{sin(x), cos(x)\},$ kde G je prostor základních goniometrických funkcí.
   $\beta_5(f, g) = f(90^o)g(90^o) - f(0^o)g(0^o)$

6. $\beta_6 : G \times G \to \mathbb{R} \quad , \quad E_6 = \{sin(x), cos(x)\},$ kde G je prostor základních goniometrických funkcí.
   $\beta_6(f, g) = f(180^o)g(90^o) + f(0^o)g(90^o)$

(1.symetricka $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 2.nic $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 3.antisymetricka $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,
4.symetricka $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 811 \end{pmatrix}$, 5.symetricka $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 6.symetricka + antisym. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

(B) Využijte výsledky z (A) a pomocí matice vyčíslite:
$\beta_4(q_1, q_2) =?,$ kde $q_1 = 1 - x \ , \ q_2 = x^2 - x$

$\beta_6(3cos(x), cos(x)) =?.$
(-14 ; 0) $\quad (1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 811 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -14$

(C) Nalezněte kvadratické formy k β_1 , β_3 , β_4.
$(\bar{\beta}_1(x) = 2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2, \quad \bar{\beta}_3(x) = 0, \quad \bar{\beta}_4(x) = 3u_1^2 + 12u_1u_2 + 28u_1u_3 + 14u_2^2 + 72u_2u_3 + 811u_3^2)$

(D) Určete matici kvadratické formy $\bar{\beta}(x) = 7x_1^2 - 6x_1x_2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3 - x_2x_3$.

$$\left(A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} \right)$$

(E) Nalezněte funkční předpis kvadratické formy $\bar{\beta}(x)$ zadané maticí

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$(\bar{\beta}(x) = -2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.)$

(F) Převeďte kvadratickou formu $\bar{\beta}(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ na kanonický (diagonální) tvar.

$$\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \right)$$

(G) Určete hodnotu parametru α, pro kterou je kvadratická forma $\bar{\beta}(x)$ positivně definitní.

$$\bar{\beta}(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$(\alpha > 2)$

(H) Najděte kanonický tvar kvadratické formy $\bar{\beta}$ a ortonormální transformaci převádějící kvadratickou formu $\bar{\beta}$ na tento kanonický tvar, když:

$$\bar{\beta}(x) = -10x_1^2 - 16x_1x_2 - 10x_2^2 - 16x_3^2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$\left(A = \begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{matice přechodu } Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)$$