Algebra II. - skalární součin

1. Buď vektory $a, ..., l \in \mathbb{R}^2$:
   $a = (0,1), \quad b = (1,3), \quad c = (4,5), \quad d = (7,8), \quad e = (9,3), \quad f = (6,5),$
   $g = (2,3), \quad h = (2,-3), \quad i = (-3,2), \quad j = (5,-6), \quad k = (-4,5), \quad l = (-9,3)$

   (a) určete odchylku a úhel vektorů: a, b; c, d; h, j,

   (b) nalezněte dvojice kolmých vektorů,

   (c) nalezněte všechny vektory kolmé na vektor c,

   (d) normujte vektory: k, l, j, g, f a nalezněte normálny vektor (velikost 1)

   (e) určete délku (velikost) vektorů: b, d, e, i, j

   (f) vypočtěte: $\mathcal{G}(\ (l+b)\ ,\ (h+g)\ )$ přičemž **definujete vlastní skalární součin** ($\mathcal{G}(u,v)$ na $\mathbb{R}^2$), **různy** od standardního sk. součinu.

2. Určete vnitřní úhly trojúhelniku ABC. (Pozn.: vektor $\overrightarrow{AB} = B - A$),
   $A = [1,-2,3], \quad B = [4,5,2], \quad C = [-3,-2,-2]$.

3. Buď vektory $a, ..., l \in \mathbb{R}^5$:
   $a = (0,0,6,7,8), \quad b = (1,0,4,5,3), \quad c = (4,1,4,2,1), \quad d = (3,0,4,2,1), \quad e = (9,1,0,1,0),$
   $f = (-1,1,1,-1,0), \quad g = (5,6,1,2,3), \quad h = (0,2,2,-3,6), \quad i = (-3,2,2,4,5),$
   $j = (5,1,5,5,-6), \quad k = (-1,-3,-4,1,5), \quad l = (0,1,-1,0,0), \quad m = (1,1,1,1,0),$

   (a) určete odchylku a úhel vektorů: e,b; c,j,

   (b) nalezněte všechny vektory kolmé na vektor h,

   (c) normujte vektory: k, d, j.

   (d) určete délku (velikost) vektorů: b,a,d,i,

   (e) vypočtěte skalární součin: $((k-g),(k-g))$.

4. Gram-Schmidtovým procesem **ortogonalizujte**:
   (a) vektory b, c z př. 1
   (b) vektory b, d z př. 1
   (c) vektory m, l, f, a, e z př. 3

5. Gram-Schmidtovým procesem **ortonormalizujte**:
   (a) vektory b, c z př. 1
   (b) vektory a, l z př. 1
   (c) vektory m, l, f, a, h z př. 3

6. Nalezněte otogonálny doplněk $U^\perp$ k podprostoru $U \subset \mathbb{R}^4$ a ortogonálni projekci vektoru $x \in \mathbb{R}^4$. Když skalární součin na $\mathbb{R}^4$ je definován předpisem: $\mathcal{G}(u,v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 4u_3v_3 + u_4v_4$.
   $x = (4,-1,-3,4) \quad a \quad U = [\![(1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)]\!]$.

7. (a) Je dána matice A, určete hodnotu parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pro kt. A definuje skalární součin na $\mathbb{R}^3$.

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

   (b) Buď dáno zobrazení $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ předpisem: $g(u,v) = u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2 + u_2v_1 + u_3v_3$.
   Rozhodněte, zda je g skalární součin na $\mathbb{R}^3$, pokuď ano, nalezněte jeho matici.