ALGEBRA II

Skalární součin - příklady k procvičení

1. Rozhodněte, zda zobrazení $g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definované předpisem
$$g(u,v) = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$$
určuje skalární součin; kde $u = (u_1, u_2, u_3)$ a $v = (v_1, v_2, v_3)$.
Pokud ano, nalezněte jeho matici.
(určuje skalární součin, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$)

2. Uvažujeme vektorový prostor $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem. Určete odchylku vektorů $u = (3,4,1,3,1)$ a $v = (1,2,3,1,1)$.
($\varphi = 41^\circ 24' 34''$)

3. Rozhodněte, zda jsou vektory $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,0,1)$ ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu $g(u,v) = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$ na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud vektory nejsou ortogonální, proveďte ortogonalizaci.
(vektory nejsou ortogonální; ortogonální báze: $(1,1,1)$, $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ $(0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$)

4. Sestrojte ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, který je generován vektory
$$u_1 = (1,0,1),\ u_2 = (0,1,2),\ u_3 = (2,1,0).$$
Pak proveďte zkoušku.
$\Big((\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}),\ (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}),\ (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}) \Big)$

5. Sestrojte ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem, který je generován vektory
$$u_1 = (1,1,0,0),\ u_2 = (0,1,1,0),\ u_3 = (0,0,1,1).$$
Pak proveďte zkoušku.
$\Big((\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0),\ (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0),\ (\frac{\sqrt{12}}{12}, -\frac{\sqrt{12}}{12}, \frac{\sqrt{12}}{12}, \frac{\sqrt{12}}{4}) \Big)$

6. Necht' $\mathbb{R}^5$ je vektorový prostor se standardním skalárním součinem. Určete ortogonální doplněk podprostoru $U \subset \mathbb{R}^5$ genervaného vektory $u_1 = (1, -1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0, -1, 1)$.
($U^\perp = [(1, 0, -1, 1, 0)(0, -1, -1, 0, 1)]$)

7. Najděte kolmý průmět vektoru $v = (-2, 2, 2, 5)$ do podprostoru
$$U = [(1, -1, -1, 2)(3, 1, 0, 1)] \text{ v } \mathbb{R}^4.$$
($(-1, 1, -2, 3)$)

8. Buď dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$
Určete hodnotu parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, pro kterou A definuje skalární součin na $\mathbb{R}^3$.
(pro žádnou)

9. Nalezněte otogonálny doplněk $U^\perp$ k podprostoru $U \subset \mathbb{R}^3$ a ortogonálni projekci vektoru $x \in \mathbb{R}^3$, také určete dimenze U a $U^\perp$.
Když víte, že skalárni součin je definován předpisem:
$$g(u, v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$$
$x = (0, 2, 1) \quad a \quad U = [\![(1, 1, 1), (1, 0, -1)]\!]$.
($x_u = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right), \quad U^\perp = [\![(1, -1, 1)]\!]), \quad \dim U = 2, \dim U^\perp = 1.$)