Rozklady čtvercových matic (lin. transformací)

(J. Šotola)

1. rozklad a invariantní báze

A bude označovat matici, kterou chceme rozložit.

1. Nalezneme **charakteristický polynom** jako $\det(A - \lambda E)$.

2. Nalezneme **vlastní čísla** $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ jako kořeny charakteristického polynomu.
   Pozn.: $l \leq k$, protože některá vlastní čísla mohou být vícenásobná.

3. Nalezneme **matice** $B_1 = A - \lambda_1 E, \ldots, B_l = A - \lambda_l E$.

4. Nalezneme **minimální anulující polynom.**

   Matice B_i („béčka“) odpovídají jednotlivým kořenovým činitelům. Umocníme je (vynásobíme se sebou samými) až na tolikátou, na kolikátou je umocněn příslušný kořenový činitel.
   Jednotlivé mocniny „béček“ mezi sebou násobíme a zjišťujeme, zda dostaneme nulovou matici. Kombinaci, která ji tvoří, odpovídá anulující polynom. Minimální anulující polynom je ten, který má nejmenší mocniny.

   Např.: pokud je charakteristický polynom matice A (typu 6×6)
   $$(3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)^3(2 - \lambda)$$
   a vlastní čísla jsme označili $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ a $\lambda_3 = 2$, pak zkoušíme mezi sebou násobit matice B_1, B_1^2, B_2, B_2^2, B_2^3 a B_3.
   Pokud je matice $B_1^2 \cdot B_2^2 \cdot B_3$ nulová a $B_1 \cdot B_2^2 \cdot B_3$, $B_1^2 \cdot B_2 \cdot B_3$ ani $B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$ nulové nejsou, pak je minimální polynom
   $$(3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)^2(2 - \lambda).$$

5. Nalezneme **jádra mocnin „béček“** odpovídajících mocninám minimálního polynomu.

   Pokud budu pokračovat v našem předchozím příkladu, budu hledat jádra matic B_1^2, B_2^2 a B_3.

   Jádro matice hledám jako řešení homogenní soustavy s touto maticí.

6. Nalezneme **báze získaných jader.**
   Tyto vektory tvoří tzv. **invariantní bázi**.

   Za parametry dosazujeme lineráně nezávisle kombinace hodnot. Vždy tolik kombinací, kolik je parametrů. Pro kontrolu: dohromady ze všech matic musíme získat tolik vektorů, jaká je velikost matice A (v našem příkladu 6). Dále, dimenze (počet bázových vektorů) každého jádra musí vyjít tolik, jaká je mocnina odpovídajícího členu v charakterisktickém polynomu. V našem případě musím získat 2 vektory z matice B_1^2, 3 vektory z matice B_2^2 a 1 z matice B_3, dohromady tedy 6.

7. Sestavíme **matici přechodu** T.

   Bázové vektory získané v předchozím bodu naskládáme do sloupců matice (vektory získané ze stejného „béčka“ musíme dát vedle sebe) a získáme tak matici přechodu, kterou budeme značit T.

8. **Převedeme** matici A do invariantní báze.

   Nalezneme T^{-1} a výsledek získáme jako

$$\underline{\underline{A_1 = T^{-1} \cdot A \cdot T}}.$$

Jak má matice po 1. rozkladu vypadat?

V bodech 6 a 7 máme více správných možností, proto se výsledné matice (a invariantní báze) mohou lišit. Jak tedy poznat, jestli je výsledek správně?
Výsledná matice se musí „rozpadnout“ do bloků (menších čtvercových matic) – každý blok bude odpovídat jednomu vlastnímu číslu a bude tak velký, jaká je mocnina odpovídajícího činitele v charakteristickém polynomu. Mimo tyto bloky musí být pouze nuly a v blocích velikosti 1 je samotné vlastní číslo.
V našem příkladě by tedy matice po prvním rozkladu mohla vypadat nějak takto:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 \\ 0 & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nebo takto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} & a_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} \end{pmatrix},$$

pokud bychom v bodě 7 zvolili jiné pořadí bázových vektorů v matici přechodu. Těchto možností je více, jediné co musíme dodržet je, aby vektory získané ze stejného „béčka“ byly v T vedle sebe. Nenulové hodnoty se budou lišit v závislosti na zvolených hodnotách parametrů v bodě 6.

Jordanův normální tvar matice

2. rozklad si vysvětlíme opačně – nejprve si ukážeme, co máme získat, a to matici v Jordanově normálním tvaru.

Matice je v Jordanově normálním tvaru, když má na hlavní diagonále vlastní čísla a pod ní (nebo nad ní, ale jen jedno z toho) sem tam nějakou tu jedničku a všude jinde nuly.
Jedničky pod (nebo nad) hlavní diagonálou navíc nemohou být tam, kde již v prvním rozkladu byly nuly – tedy nemohou „spojovat“ bloky příslušné různým vlastním číslům. Takže už nyní víme, že Jordanův normální tvar matice z našeho příkladu bude vypadat takto:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nebo takto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & a_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

pokud bychom chtěli jedničky nad hlavní diagonálou. Možností je opět více.
Naším úkolem v 2. rozkladu bude tedy „pouze“ zjistit, zda prvky $a_{2,1}$, $a_{4,3}$ a $a_{5,4}$ (nebo $a_{2,3}$, $a_{3,4}$ a $a_{5,6}$) jsou jedničky nebo nuly.

2. rozklad, Jordanův normální tvar a Jordanova báze

A bude opět označovat matici, kterou chceme rozložit.

1.-4. Provedeme kroky 1.-4. z 1. rozkladu.

5. Nalezneme **jádra mocnin „béček“.** V tomto případě však budu hledat jádra mocnin „béček“ menších nebo rovných odpovídajícím mocninám minimálního polynomu.

   Pokud budu opět pokračovat v předchozím příkladu, budu hledat jádra matic B_1, B_1^2, B_2, B_2^2 a B_3.

6. Nalezneme **báze získaných jader.**

7. Nalezneme **Jordanovu bázi.**

   Následující postup provádíme pro každé „béčko“ zvlášť.
   Z báze jádra nejvyšší mocniny „béčka“ (např. B_2^2) vezmeme tolik vektorů, abychom bázi jádra stejného „béčka“ o jednu mocninu menší (tedy

v našem případě B_2) doplnili do počtu mocniny vyšší (tedy B_2^2). Obsahuje-li báze jádra B_2^2 vektory $v_1 = (0,0,1,0,0,0)$, $v_2 = (0,0,0,1,-1,0)$ a $v_3 = (0,0,0,1,0,1)$ a báze B_2 vektory $v_1' = (0,0,1,0,0,0)$ a $v_2' = (0,0,0,1,0,1)$ doplníme jeden vektor. Ten můžeme libovolně zvolit, pokud bude lineárně nezávislý. V našem případě to může být jen v_2, protože ostatní dva jsou nejen lineárně závislé, ale dokonce totožné. Označme ho $j_1 = v_2$, protože to je první vektor hledané Jordanovy báze.
Podobný postup nyní zopakujeme s mocninami o jedna nižší (tedy B_2 a B_2^0). Jádro B_2 má v bázi 2 vektory (v_1' a v_2'), jádro B_2^0 má bázi prázdnou, je tedy potřeba doplnit vektory 2. První z nich ale už musí být $j_2 = B_2 \cdot j_1 = (0,-3,0,-1,0,1)$, druhý můžeme zvolit libovolně (lineárně nezávisle) – třeba $j_3 = v_1'$. (Pokud bychom už měli více vektorů z Jordanovy báze, museli bychom nejdřív použít je stejně jako j_1.)
Jakmile dosáhneme mocniny 0, skončíme. Celkově musíme z každého „béčka“ získat tolik vektorů Jordanovy báze, na kolikátou je umocněn příslušný člen v charakteristickém polynomu. Tedy 3 z B_2, 2 zB_1 a 1 z B_3.

8. Sestavíme **matici přechodu** T.

   Vektory Jordanovy báze naskládáme do sloupců matice (vektory získané ze stejného „béčka“ a vektory získané vynásobením béčkem z jiných vektorů musíme dát vedle sebe) a získáme tak matici přechodu, kterou budeme značit T.

9. **Převedeme** matici A do Jordanovy báze.

   Nalezneme T^{-1} a výsledek získáme jako
   $$\underline{\underline{A_{JNT} = T^{-1} \cdot A \cdot T}}.$$

8.-9. Místo kroků 8. a 9., které jsou poměrně časově náročné můžeme **Jordanův normální tvar matice „uhádnout“** z toho, jak jsme získali Jordanovu bázi. Vektorům, které jsou „spojeny“ násobením „béčkem“odpovídá jeden blok, ostatním další. V našem případě se blok příslušný vlastnímu číslu -1 rozpadne na dva, jeden velikosti 2 pro j_1 a j_2 (protože $j_2 = B_2 \cdot j_1$) a jeden velikosti 1, pro j_3.
Tuto skutečnost můžeme zachytit v následujícím diagramu:

$$B_2\cdot \begin{array}{ll} j_1 & \\ \downarrow & \\ j_2 & j_3 \end{array} \qquad \text{nebo jednodušseji:} \quad \begin{array}{ll} \bullet & \\ \downarrow & \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

Na základě tohoto můžeme tedy říct, že Jordanův normální tvar naší matice by vypadal takto (stále zbývá doplnit $a_{2,1}$):

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešený příklad

Buď matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ukažme si její 1. i 2. rozklad.

1. Nejprve potřebujeme nalézt charakteristický polynom. Determinant budeme počítat Laplaceovým rozvojem:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1-\lambda & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = |\text{podle 5. řádku}| =$$

$$= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1-\lambda & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = |\text{podle 4. řádku}| =$$

$$= (-1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = |\text{podle 3. sloupce}| =$$

$$= (-1-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = |\text{Sarrusovo pravidlo}| =$$

$$(-1-\lambda)^3((3-\lambda)^2(2-\lambda) \underbrace{-1 + (3-\lambda) - (2-\lambda)}_{=0}) = (-1-\lambda)^3(3-\lambda)^2(2-\lambda)$$

2. Charakteristický polynom nám již vyšel rozložený na kořenové činitele (všimněte si, že jsme neroznásobovali, byť to bylo dílo šťastné náhody). Takže můžeme snadno určit vlastní čísla:

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1 \text{ a } \lambda_3 = 2.$$

(Označení jsem zvolil tak, aby bylo shodné s označním z návodu.)

3. $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

   $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

4. Nyní budeme násobit mezi sebou matice B_1, B_1^2, B_2, B_2^2, B_2^3 a B_3 (protože člen s $\lambda_1 = 3$ je v charakteristickém polynomu umocněn na druhou, člen s λ_2 na třetí a člen s λ_3 na prvou.

$$C_1 = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & -4 & 32 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$C_2 = B_1^2 \cdot B_2 \cdot B_3 = B_1 \cdot C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -144 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$C_3 = B_1 \cdot B_2^2 \cdot B_3 = B_2 \cdot C_1 = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 0 & 16 & 16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & -16 & 0 & -16 & -16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 16 & 0 & 16 & 16 & -16 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$B_1^2 \cdot B_2^2 \cdot B_3 = B_2 \cdot C_2 = B_1 \cdot C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

   Takže minimální polynom je $(3-\lambda)^2(-1-\lambda)^2(2-\lambda)$ a dál nás budou zajímat pouze matice B_1^2, B_2^2 a B_3.
   Všimněte si také, že ač obecně násobení matic není komutativní, tak násobení „béček“ je! (Zkuste přijít na to proč.)

5. Nalezeneme jádra matic B_1^2, B_2^2 a B_3.

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & -16 & -40 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 24 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešením je tedy $x_1 = t, x_2 = s, x_3 = -t, x_4 = 0, x_5 = 0$ a $x_6 = t$ pro $t, s \in \mathbb{R}$.

$$B_2^2 = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 16 & 0 & 7 & 7 & -7 \\ -8 & -8 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & -8 & -8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & 18 & 18 & -18 \\ 0 & 9 & 0 & 14 & 14 & -14 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 32 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešením je tedy $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = r, x_4 = t - s, x_5 = s$ a $x_6 = t$ pro $t, s, r \in \mathbb{R}$.

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešením je tedy $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$ a $x_6 = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$.

6. Sestavme jednotlivé vektory a zvolme vhodné parametry.
   Pro vektor $(t, s, -t, 0, 0, t)$ získaný z B_1^2 zvolíme parametry $t = 1, s = 0$ a $t = 0, s = 1$ a získáme vektory invariantní báze: $v_1 = (1, 0, -1, 0, 0, 1)$ a $v_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$.
   Pro vektor $(0, 0, r, t - s, s, t)$ získaný z B_2^2 zvolíme parametry $t = 1, s = 0, r = 0$; $t = 0, s = -1, r = 0$ a $t = 0, s = 0, r = 1$ a získáme vektory invariantní báze: $v_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 1)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1, -1, 0)$, $v_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$.
   A konečně pro vektor $(-t, t, 0, 0, 0, 0)$ získaný z B_3 zvolíme parametr $t = -1$ a získáme poslední vektor invariantní báze $v_6 = (1, -1, 0, 0, 0, 0)$.
   Invariantní bázi tedy tvoří vektory $(1, 0, -1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 1, -1, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 0, 0, 0)$.

7. Vektory invariantní báze dáme do sloupců matice přechodu:
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Nalezneme T^{-1}:
$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

A nyní už stačí jen „obnásobit“ původní matici.

$$A_1 = T^{-1} \cdot A \cdot T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$

Podívejme se nyní na 2. rozklad téže matice A.

1.-4. Z 1. rozkladu jsme již získali charakteristický polynom $(3-\lambda)^2(-1-\lambda)^3(2-\lambda)$, vlastní čísla $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ a $\lambda_3 = 2$, matice B_1, B_2 a B_3, viz výše a minimální polynom $(3-\lambda)^2(-1-\lambda)^2(2-\lambda)$.

5. Minimální polynom nám říká, že budeme potřebovat jádra matic B_1^0, B_1, B_1^2, B_2^0, B_2, B_2^2, B_3^0 a B_3.
Jádra matic B_1^2, B_2^2 a B_3 jsme spočítali již u prvního rozkladu. Jsou to po řadě vektory tohoto tvaru $(t, s, -t, 0, 0, t)$, $(0, 0, r, t-s, s, t)$, $(-t, t, 0, 0, 0, 0)$. Rovněž jádra matic na nultou není těžké získat, je to vždy pouze vektor $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, takové jádro má prázdnou bázi. Zbývá nám tedy nalézt pouze jádra matic B_1 a B_2.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 4 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešením je tedy $x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = -t, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = t$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Jádro B_2:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -15 & 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešením je tedy $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = s, x_4 = t, x_5 = 0, x_6 = t$, pro $s, t \in \mathbb{R}$.

6. Stejně jako jádra samotná i báze jader B_1^2, B_2^2 a B_3 jsme již spočítali u 1. rozkladu. Pro přehlednost je tu opíšeme.
   Pro B_1^2 to byly vektory $v_1 = (1, 0, -1, 0, 0, 1)$ a $v_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$.
   Pro B_2^2 to byly vektory $v_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 1)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1, -1, 0)$ a $v_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$.
   A pro B_3 to byl vektor $v_6 = (1, -1, 0, 0, 0, 0)$.
   Zbývá tedy dopočítat báze jader matic B_1 a B_2, nulté mocniny matic mají, jak už jsme zjistili o krok dříve, bázi prázdnou.
   Pro vektor $(t, 0, -t, 0, 0, t)$ získaný z B_1 zvolíme parametr $t = 1$ a získáme tak vektor $v_1' = (1, 0, -1, 0, 0, 1)$.
   Pro vektor $(0, 0, s, t, 0, t)$ získaný z B_2 zvolíme parametry $t = 1, s = 0$ a $t = 0, s = 1$ a získáme tak vektory $v_2' = (0, 0, 0, 1, 0, 1)$ a $v_3' = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

7. Tento krok je třeba dělat pro každé „béčko“ zvlášť. Začněme tedy třeba maticí B_1 (a jejími mocninami). Vezmeme báze jader B_1^2 a B_1 (dvě nejvyšší mocniny s ohledem na minimální polynom). V bázi (jádra) B_1^2 jsou dva vektory – v_1 a v_2, zatímco v bázi B_1 pouze jediný – v_1'. Proto vezmeme jeden vektor z báze B_1^2, který je lineárně nezávislý s v_1' a označíme ho j_1, protože to je 1. vektor hledané Jordanovy báze. V našem případě vyhovuje pouze v_2, protože v_1 je nejen lineárně závislý s v_1', ale dokonce totožný. Platí tedy $j_1 = v_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$.
   Vezměme nyní matice B_1 a B_1^0, první má jeden bázový vektor (v_1') a druhá žádný. Je tedy potřeba doplnit jeden vektor. Nyní ale musíme dát přednost vektoru $B_1 \cdot j_1$ před samotným v_1'. Doplněný vektor označíme j_2, jedná se o druhý vektor Jordanovy báze. Získáváme tedy $j_2 = B_1 \cdot j_1 = (1, 0, -1, 0, 0, 1)$. Shodou okolností vyšel samotný v_1', ale obecně může vyjít libovolný s ním lineárně závislý vektor.
   Pokračujme s maticí B_2. Vezměme obdobně báze B_2^2 a B_2. V bázi B_2^2 jsou vektory tři a v bázi B_2 dva. Doplněním báze B_2 tedy získáme pouze jeden

vektor Jordanovy báze, označme ho j_3. Podobně jako u B_1, můžeme i tady doplnit pouze vektor v_4, protože v_3 i v_5 jsou s vektory v_2' a v_3' lineárně závislé. Získáváme tedy $j_3 = v_4 = (0, 0, 0, 1, -1, 0)$.
Dále vezmeme nižší mocniny B_2, a to B_2 a B_2^0. B_2 má dva bázové vektory a B_2^0 žádný, získáme tedy dva vektory (j_4 a j_5) Jordanovy báze. Nejprve musíme opět doplnit vektor $j_4 = B_2 \cdot j_3 = (0, 0, -3, 1, 0, 1)$. Všimněte si, že j_4 je lineárně závislý (ve trojici) s bázovými vektory $B_2 - v_2'$ a v_3', ale ve dvojici je s libovolným z nich nezávislý.
Zbývá nám doplnit ještě jeden vektor, nyní to může být libovolný z v_2' a v_3', protože každý z nich je (sám), jak už bylo řečeno, s j_4 lineárně nezávislý. Zvolem si proto „jednodušší“ z nich – $j_5 = v_3' = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$.
Zbývá nám poslední „béčko“ a poslední vektor Jordanovy báze. Báze B_3 (nebereme vyšší mocninu, protože není ani v minimálním polynomu) má jen jeden vektor – v_6. Báze B_3^0 nemá žádný vektor, chceme a můžeme doplnit jen jeden vektor – $j_6 = v_6 = (1, -1, 0, 0, 0, 0)$.

8. Vektory $j_1, \ldots, j_6$ naskládáme do sloupců matice přechodu.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Nelezneme T^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

A nyní už jen stačí „obnásobit“původní matici A.

$$A_{JNT} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$

8.-9. Místo počítání inverzní matice přechodu a následné podobnostní transformace matice A („obnásobení“) lze použít následující trik.
Všimneme si, jak jsme získali Jordanovu bázi. Vektor j_1 jsme si zvolili (za dodržení určitých podmínek), vektor j_2 jsme dostali jako $B_1 \cdot j_1$. Vektor j_3 jsme si opět zvolili a j_4 dostali jako B_2-násobek j_3 podboně jako tomu bylo u j_2. Vektory j_5 a j_6 jsme si opět zvolili.
Toto můžeme zapsat do diagramu, s několika sloupci, kde na vrchu sloupce budou vždy zvolené bázové vektory a od nich povedou šipky dolů k jejich B-násobkům (v našem případě B_1 nebo B_2). Náš diagram by tedy vypadal takto:

$$\begin{array}{cccccc} & j_1 & & j_3 & & \\ B_1\cdot & \downarrow & B_2\cdot & \downarrow & & \\ & j_2 & & j_4 & j_5 & j_6 \end{array}$$

což můžeme zjednodušit, když vynecháme násobení „béčky“ a místo „ječek“napíšeme jen tečky.

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & & \\ \downarrow & \downarrow & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Tento diagram nám říká, ž v A_{JNT} budou nejprve dva bloky velikosti 2 (dvě tečky ve sloupečku) a pak dva bloky velikosti 1. Je třeba si také dát pozor, kterým vlastním číslům které bloky náleží (ať víme, co je na diagonále). První sloupeček přísluší matici B_1 a tedy vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$, druhé dva náleží B_2 a $\lambda_2 = -1$ a třetí náleží B_3 a $\lambda_3 = 2$.
Nyní už stačí sestavit matici.

$$\underline{\underline{A_{JNT} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$