

ALGEBRA II

Vlastní vektory, vlastní hodnoty - příklady k procvičení

1. Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadané maticí:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(\lambda_1 = 0, v_1 = (4, 4, 1), \lambda_{2,3} = 3, v_2 = (1, -2, 1))$$

2. Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3, -x_1 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + x_3).$$

$$(\lambda_1 = 1, v_1 = (1, 1, 1), \lambda_2 = -2, v_2 = (2, -1, 2), \lambda_3 = 3, v_3 = (-1, 3, 4))$$

3. Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ zadané maticí:
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(\lambda_1 = 3, v_1 = (1, 2, 0, 0), \lambda_2 = 1, v_2 = (0, 1, 0, 0), \lambda_3 = \lambda_4 = 2, v_3 = (0, 0, 1, 0))$$

4. Určete, zda existuje diagonální matice k matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Pokud diagonální matice existuje, sestavte podobnostní transformaci.

$$\left(D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = P^{-1}AP, \text{ kde např. } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

5. Určete spektrum matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$(\{0, 1\})$$

6. Určete, který z vektorů $v_1 = (-2, 1, 3)$, $v_2 = (3, -3, 0)$, $v_3 = (0, 0, -5)$ je vlastním vektorem matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Dále najděte odpovídající vlastní číslo.

(Vlastní vektory jsou v_1 a v_2 , odpovídající vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -3$ a $\lambda_2 = 1$.)

7. Dokažte, že si matice $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}$ nejsou podobné.

8. Bud' $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení. Určete vlastní hodnoty a vektory, nalezte dimenze jádra a obrazu zobrazení. (f je defináno předpisem níže.)

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)$$

(Vlastní čísla: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, vl. vektory: $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (0, 1, -1)$ $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$, $\dim(\text{Im}(f)) = 3$.)