

ALGEBRA II

Matice lineárního zobrazení - příklady k procvičení

1. Je dáno lin. zobr. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definováno předpismi:
 $f((1, 1, 1)) = (1, 3)$, $f((0, 1, 1)) = (0, 2)$, $f((0, 0, 1)) = (0, 1)$.

- (a) Určete obraz bodu $x = (2, 1, -1)$.
(b) Nalezněte bod $y \in \mathbb{R}^3$, takový že: $f(y) = (3, -1)$.
(c) Nalezněte maticu zobrazení pro báze:
 $E_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$, $E_{\mathbb{R}^2}$ - kanonická báze.
(d) Nalezněte maticu zobrazení pro kanonické báze.
(e) Nalezněte jádro a obraz zobrazení.

$$(f(x) = (2, 2) / y \in \{(3, -4 - a, a) ; \forall a \in \mathbb{R}, \} / A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} / A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} / Ker(f) = \mathbb{I}(0, 1, -1), Im(f) = \mathbb{R}^2)$$

2. Je dáno lineární zobrazení $re: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, kde $re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z). Určete matici tohoto zobrazení ve vhodně zvolených bázích.

pozn: z^* číslo komplexně sdružené k číslu z .

(v kanonických bázích: $(1, 0)$)

3. Je dáno lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$, kde $\varphi(ax + b) = (b - a)x + 3a + b$.
Určete matici tohoto zobrazení ve vhodně zvolených bázích.

pozn: \mathbb{P}_1 je prostor všech polynomů stupně nejvýše 1.

(v kanonických bázích: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$)

4. Bud' $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení definované předpisem $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2x_1 + 3x_2, 3x_2 + 2x_3, 3x_3 + 2x_4)$. Určete matici tohoto zobrazení ve vhodně zvolených bázích

(v kanonických bázích: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$)

5. Bud' $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zobrazení vektorových prostorů nad \mathbb{R} definované předpisem $f((a, b, c, d)) = (a + b, c - d)$. Určete matici tohoto lineárního zobrazení v bázích $e_1 = (1, 1, 0, 1)$, $e_2 = (0, 5, 3, 2)$, $e_3 = (2, 3, 1, 1)$, $e_4 = (3, 0, 0, 1)$ a $f_1 = (1, 2)$, $f_2 = (0, 3)$.

($\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{3}{3} \\ -\frac{5}{3} & -3 & -\frac{10}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$)

6. Je dáno lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem $\varphi((x_1, x_2)) = (3x_1 - 4x_2, x_1 + 5x_2)$.

- (a) Učete matici tohoto lineárního zobrazení v bázi $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.
- (b) Určete matici přechodu k bázi $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (2, 5)$.
- (c) Určete matici tohoto lineárního zobrazení v bázi $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (2, 5)$.

$$(A_e = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_f = \begin{pmatrix} 77 & 124 \\ -43 & -69 \end{pmatrix})$$