# **Algebra II.** - Matice lineárních zobrazení, matice přechodu

1. Nalezněte matice lin. zobrazení z příkladů 3, 4, 5, 6, 7 z předešlé DÚ (povinné př. na Lin.Zobr.) ve vhodně zvolených bázích.

2. Jsou dána lin. zobr. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definována pomocí matic $A_f, A_g$ (níže). Nalezněte matice zobrazení $f \circ g,\ g \circ f$.

   $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ A_g = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Je dáno lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2,\ x_2 + x_3)$. Určete matici tohoto lineární zobrazení v bázích $E$ a $F$. $e_1 = (1,3,5)$, $e_2 = (0,1,2)$, $e_3 = (1,0,1)$ a $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (3,4)$.

4. Je dáno lin. zobr. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definováno předpismi: $f((1,1,0)) = (1,2)$, $f((0,1,1)) = (1,1)$, $f((1,0,1)) = (-1,0)$.

   (a) Určete obraz bodu $x = (2,1,-1)$.

   (b) Nalezněte bod $y \in \mathbb{R}^3$, takový že: $f(y) = (3,-1)$.

   (c) Nalezněte maticu zobrazení pro kanonické báze.

   (d) Nalezněte jádro a obraz zobrazení.

5. Nalezněte jádro a obraz lineárních zobrazení $f$ a $g$, pokud' znáte matici zobrazení pro kanonické báze.

   $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A_g = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

6. Nalezněte obraz polynomu $2x - 1$, dále nalezněte jádro a obraz lineárniho zobrazení $f$ pokud' znáte matici zobrazení pro dané báze.

   $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{R}^3,\ A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad E_{\mathbb{P}^1} = \{x+1,\ 3\},\ E_{\mathbb{R}^3}$ - kanonická báze.

7. Nalezněte matice přechodu mezi bázema $E_1, E_2$.

   (a) $E_1 = \{(2,3,0,2),\ (1,1,1,1),\ (2,0,3,1),\ (1,4,2,0)\}$,
   $E_2 = \{(1,2,0,1),\ (2,0,3,3)\ (3,1,4,4)\ (4,2,0,1)\}$

   (b) $E_1 = \{(1,0,1),\ (2,1,1),\ (0,0,2)\}$,
   $E_2 = \{(0,1,1),\ (1,0,2),\ (2,0,2)\}$

# **Algebra II.** - Lineární zobrazení (př. 3-7)

3. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definováno předpisem: $f(x, y) = (2x + y\ ,\ x + 3y)$.
   Zjistěte jestli je dané zobrazení lineární, dále nalezněte jeho jádro a obraz.

4. Buď $f : \mathbb{P}_4 \to \mathbb{P}_4$ zobrazení, které každému polynomu přiřadí jeho reciproký polynom, tzn: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad \mapsto \quad a_4 + a_3x + a_2x^2 + a_1x^3 + a_0x^4$.
   Ukažte, že zobrazení je lineární, dále nalezněte jeho jádro a obraz.
   (pozn: $\mathbb{P}_4$ je vektorový prostor polynomů nejvýše 4. stupně nad polem $\mathbb{R}$)

5. Buď $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$ definované předpisem $f((a, b, c, d)) = (a+b, c-d)$. Dokažte, že $f$ je lineární zobrazení nad polem $\mathbb{R}$. Nalezněte také jeho jádro a obraz.

6. Určete, zda je zobrazení $\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, kde $\varphi(ax + b) = (b - 2a)x + 3(a + b) + b$ lineární nad polem $\mathbb{R}$. Pokud ano, nalezněte jeho jádro a obraz.

7. Rozhodněte jestli je zobrazení $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^3$ (definováno předpisem níže) lineární a nalezněte obraz polynomu $2x - 1$. Dále nalezněte jádro a obraz zobrazení.

$$f(ax + b) \;=\; \left(a,\ a, \frac{-4a + b}{3}\right)$$