

ALGEBRA II

Lineární zobrazení, Jádro a obraz lineárního zobrazení - příklady
k procvičení

1. Zjistěte, zda je zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$$

lineární nad polem \mathbb{R} . Pokud ano, nalezněte jeho jádro a obraz.

(Zobr. je lineární; $\text{Ker } f = [(1, 1, -1)]$; $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$)

2. Ověřte, zda je zobrazení $re : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, kde $re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z) lineární nad polem \mathbb{R} . Dále nalezněte jeho jádro a obraz.

(Zobr. je lineární; $\text{Ker}(re) = \{ri; r \in \mathbb{R}\}$; $\text{Im}(re) = \mathbb{R}$)

3. Určete, zda je zobrazení $\varphi : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$, kde $\varphi(ax + b) = (b - a)x + 3a + b$ lineární nad polem \mathbb{R} . Pokud ano, nalezněte jeho jádro a obraz.

(Zobr. je lineární; $\text{Ker } \varphi = 0$; $\text{Im } \varphi = \mathbb{P}_1$)

4. Bud' $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zobrazení vektorových prostorů nad \mathbb{R} definované předpisem $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2x_1 + 3x_2, 3x_2 + 2x_3, 3x_3 + 2x_4)$. Dokažte, že f je lineární zobrazení nad polem \mathbb{R} . Dále nalezněte jeho jádro a obraz.

(Zobr. je lineární; $\text{Ker } f = [(-6, 4, -6, 9)]$; $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$)

5. Určete, zda je zobrazení $\varphi : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde $\varphi(ax^2 + bx + c) = (a, b, a + c)$ lineární nad polem \mathbb{R} . Pokud ano, nalezněte jeho jádro a obraz.

(Zobr. je lineární; $\text{Ker } \varphi = 0$; $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^3$)

6. Zjistěte, zda zobrazení $f : \mathcal{M}_{2/2} \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem $f(A) = \text{tr}(A)$, kde $\text{tr}(A)$ je stopa matice A , je lineární nad polem \mathbb{R} .
pozn: $\mathcal{M}_{2/2}$ - matice typu 2x2.

(Zobr. je lineární.)