Algebra II. - Lineární zobrazení

1. Buď $M^{m\times n}$ prostor matic typu $m \times n$. A buď zobrazení f: $M^{m\times n} \to M^{m\times n}$ definované předpisem: $f(A) = 3 * A$. Zistěte, jestli je dané zobrazení lineární, dále nalezněte jeho jádro a obraz.

2. Zjistěte, zda zobrazení $f : \mathcal{M}_{3/3} \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(A) = tr(A)$, kde $tr(A)$ je stopa matice A, je lineární nad polem $\mathbb{R}$, dále nalezněte jeho jádro a obraz.
(pozn: $\mathcal{M}_{3/3}$ - označuje matice typu 3×3.)

3. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definováno předpisem: $f(x, y) = (2x + y\ ,\ x + 3y)$.
Zjistěte jestli je dané zobrazení lineární, dále nalezněte jeho jádro a obraz.

4. Buď $f : \mathbb{P}_4 \to \mathbb{P}_4$ zobrazení, které každému polynomu přiřadí jeho reciproký polynom, tzn: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad \mapsto \quad a_4 + a_3x + a_2x^2 + a_1x^3 + a_0x^4$.
Ukažte, že zobrazení je lineární, dále nalezněte jeho jádro a obraz.
(pozn: $\mathbb{P}_4$ je vektorový prostor polynomů nejvýše 4. stupně nad polem $\mathbb{R}$)

5. Buď $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$ definované předpisem $f((a, b, c, d)) = (a+b, c-d)$. Dokažte, že f je lineární zobrazení nad polem $\mathbb{R}$. Nalezněte také jeho jádro a obraz.

6. Určete, zda je zobrazení $\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, kde $\varphi(ax + b) = (b - 2a)x + 3(a + b) + b$ lineární nad polem $\mathbb{R}$. Pokud ano, nalezněte jeho jádro a obraz.

7. Rozhodněte jestli je zobrazení $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^3$ (definováno předpisem níže) lineární a nalezněte obraz polynomu $2x - 1$. Dále nalezněte jádro a obraz zobrazení.

$$f(ax + b) = \left(a,\ a, \frac{-4a + b}{3}\right)$$