Algebra II. - Vektorové podprostory

DÚ

1. Mějme prostor V_4. Určete dimenzi a bázi podprostorů $U,\ W,\ U+W,\ U\cap W$.

$$U = [\![(2,-3,0,1)\ ,\ (3,1,-2,5)\ ,\ (2,-14,4,-6)]\!] \quad , \quad W = [\![(-1,4,2,3)\ ,\ (4,2,0,9)\ ,\ (2,10,4,15)]\!]$$

2. Mějme prostor V_3 a $W \subset V_3$, kde $W = [\![w_1, w_2, w_3, w_4]\!]$. Nalezněte bázi W a zjistěte jestli $u_1, u_2 \in W$, když:
$w_1 = (1,0,3)\,,\quad w_2 = (0,1,1)\,,\quad w_3 = (1,-1,0)\,,\quad w_4 = (1,0,2)$
$u_1 = (3,17,1)\,,\quad u_2 = (5,-1,0)$

3. Zjistěte jestli soubor matic $A_1,...,A_4$ z vektorového prostoru $M_{2x2}(\mathbb{R})$ je závislý/nezávislý.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Mějme prostor $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ a množinu $M = \{(a,b,c) \mid \max\{a,b,c\} = 0 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.
Rozhodněte, jestli $M \subset \mathbb{R}$ je podprostorem $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

5. Ukažte, že množina $M = \{(0,2,3,1), (-1,3,3,1), (1,1,1,1), (2,1,-3,5)\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.
Určete taky zložky (souřadnice) vektoru $x = (-2,0,3,1)$ v **této** baźe.

6. Ověřte přímym výpočtem (tj z definice báze), že vektory $1+i, 1-i$, tvoří bázi prostoru $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

7. Určete zložky (souřadnice) vektoru $x = (6,9,14)$ v báze prostoru U ($E_U = \{u_1,u_2,u_3\}$), kde
$u_1 = (1,1,1)\ ,\ \ u_2 = (1,1,2)\ ,\ \ u_3 = (1,2,3)$.

8. Určete bázi a dimenzi podprostorů: $U+V\ ,\ \ U\cap V$, kde: $V = [\![(1,2,0),\ (0,1,-3),\ (2,1,9),\ (1,3,-3)]\!]$ a U je generováno **řešením soustavy** systému lineárnich rovnic:

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 0$$

$$-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$$

9. Zjistě jestli daná podmnožina tvoří podprostor prostoru $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$:
   (a) $A = \{(x,y) \mid x \ = \ y+1;\ x,y \in \mathbb{R}\}$
   (b) $B = \{(x,y) \mid y \ = \ k;\ k,x,y \in \mathbb{R}\}$ (k se nemění)
   (c) $C = \{(x,y) \mid y \ \geq \ 0;\ x,y \in \mathbb{R}\}$
   (d) $D = \{(x,y) \mid x \ = \ -y;\ x,y \in \mathbb{R}\}$

10. Zjistěte jestli vektor $a = (-1,-4,7)$ je z podprostoru $M \subset \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ generovaného vektormi:

$$(1,-2,3)\,,\ \ (-2,1,-1)\,,\ \ (0,-3,5)\,,\ \ (-2,-5,9)\,,\ \ (-1,-1,2).$$