ALGEBRA II

Vektorové prostory - příklady k procvičení

1. Zjistěte, zda jsou vektory $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (1,3,2)$, $u_3 = (2,1,5)$ lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

   (Vektory jsou lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.)

2. Zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nad polem $\mathbb{R}$, kde

$$(2,1,0),(3,1,4),(-1,1,1),(2,3,4).$$

   (Vektory netvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nad polem $\mathbb{R}$.)

3. Je dán vektorový prostor $\mathbb{R}^4$ nad polem $\mathbb{R}$.
   Dále je dána množina vektorů z $\mathbb{R}^4$: $(1,2,1,2)$, $(2,1,2,1)$, $(1,1,1,1)$, $(-2,0,-1,-3)$, $(-1,1,0,-2)$. Zjistěte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^4$.

   (Vektory negenerují vektorový prostor $\mathbb{R}^4$ nad polem $\mathbb{R}$.)

4. Ukažte, že množina generátorů

$$M = \{(0,2,3,1)(-1,3,3,1)(1,1,1,1)(2,1,-3,5)\}$$

   tvoří bázi v $\mathbb{R}^4$. Dále nalezněte souřadnice vektoru $(-2,0,3,1)$ v této bázi.

   (Souřadnice vektoru $(-2,0,3,1)$ v bázi M jsou $a = 37/7$, $b = -2$, $c = -36/7$, $d = 4/7$.)

5. Ověřte, že vektory $u_1 = 1 + i$ a $u_2 = 1 - i$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$.

6. Rozhodněte, zda vektory $p_1(x) = x^2 + 1$ a $p_2(x) = x^2 + x$ tvoří bázi v prostoru všech polynomů stupně nejvýše dva $P_2(x)$.

   (Vektory bázi netvoří.)

7. Je dán vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ nad polem $\mathbb{R}$.
   Dále je dána množina vektorů z $\mathbb{R}^3$: $(\alpha,4,11)$, $(1,2,3)$, $(3,1,4)$. Určete všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

   (Vektory jsou lineárně nezávislé pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.)

8. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ určete dimenzi vektorového prostorou V, je-li:

$$u_1 = (2,2,2) \quad u_2 = (1,\alpha,1) \quad u_3 = (2,2,\alpha).$$

   (pro $\alpha = 1,2 \quad \dim V = 2$; jinak $\dim V = 3$)