Algebra II. - Vektorové prostory

DÚ

1. Pomocí determinantu zjistěte jestli jsou vektory $a_1, ..., a_4$ lineárně závislé:

$$a_1 = (3, 2, -1, 2),\ a_2 = (2, 1, 2, -1),\ a_3 = (4, 3, -2, 4),\ a_4 = (5, 4, 3, 5)$$

2. Pro jaké reální čísla x, y jsou vektory $(-2, x, 3), (4, -8, y)$ lineárně nezávislé?

3. Zjistě jestli jsou lineárně závislé/nez. vektory: $(1, 3, 4),\ (2, 1, 3),\ (3, 1, 4)$.

   (a) Vo vektorovom prostore $V_3(\mathbb{Z}_7)$ ($\mathbb{Z}_7$ je mn. zbytokových tř. modulo 7)

   (b) Vo vektorovom prostore $V_3(\mathbb{R})$.

4. Zjistě jestli vo vektorovom prostore $P_3(\mathbb{R})$. jsou lineárně závislé/nez. vektory:

   (a) $1 + x,\quad x + x^2,\quad x^2 + x^3,\quad x^3 + 1$

   (b) $1 + x,\quad 1 - x,\quad 2x^2 + x^3,\quad x^3 - 2x^2$

5. Zjistě jestli jsou dané vektory lineárně závislé/nez.:

   (a) $(-1, -1, 1, 1),\quad (1, -1, 1, -1),\quad (-1, 1, 1, -1),\quad (1, 1, 1, 1)$

   (b) $(1, 0, -2, 3),\quad (-1, 3, 0, 0),\quad (2, 0, 1, 1),\quad (1, 6, -1, 4)$

6. Nalezněte souřadnice vektoru v v bázi E, vektorového prostoru V.:

   (a) $V = \mathbb{R}^3,\quad v = (1, 2, 3),\qquad E : e_1 = (1, 0, 0),\quad e_2 = (1, 0, 1),\quad e_3 = (0, 1, 1)$.

   (b) $V = M_{2x2},\quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\qquad E : e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Nalezněte bázi prostoru $U \subset \mathbb{R}^4$ a určete jeho dimenzi. U je generováno vektormi:

$$v_1 = (1, 2, 2, 5),\ v_2 = (1, 0, 2, 5), v_3 = (3, 2, 6, 15),\ v_4 = (5, 4, 10, 25),\ v_5 = (8, 8, 0, 8)$$

8. Rozhodněte, jestli vektory u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 generují prostor $\mathbb{R}^4$. (Své tvrzení zdůvodněte!)

$$u_1 = (3, 1, 3, 1),\ u_2 = (10, 11, 10, 11),\ u_3 = (18, 18, 18, 18), u_4 = (5, 2, 5, 2),\ u_5 = (8, 5, 9, 6)$$

9. Polynóm $p_3(x)$ má v báze $E_1 = \{1, (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3\}$ souřadnice $[p_3(x)]_{E_1} = [-1, 2, 0, -3]$. Určete jeho souřadnice v báze $E_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$.

10. Nalezněte bázi a dimenzi vektorového prostoru všech řešení systému lineárnich rovnic:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

$$4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$$