

Konzultace z Algebry I: Matice - algebraické vlastnosti

Příklady označené červenou barvou jsou povinné.

1. Jsou zadány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Budou existovat součiny $A \cdot B$, $A \cdot C$, $A \cdot D$, $B \cdot C$, $D \cdot B$, $D \cdot C$? Pokud ano, spočítejte je.

2. Předpokládejme matice A, B, C, D z př. 1. Existují následující matice? Pokud ano, spočítejte je.

- $(C^T - 2A)^T$,
- $((B + 3A) \cdot D)^T$,
- $(C \cdot B)^T - A$.

3. Jsou zadány matice (nad polem \mathbb{C})

$$D = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i & 1-i \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1+2i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Spočítejte součin $D \cdot E \cdot F$.

4. **Ověřte na matici $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, že platí $(G^{-1})^T = (G^T)^{-1}$.**

5. Jsou zadány matice $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -20 \\ 5 & -1 & 13 \end{pmatrix}$. Spočítejte $((X+Y)^T \cdot 5Z)^T$.

6. Jsou zadány matice $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & -7 \\ -4 & -2 & 11 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2i & i+1 \end{pmatrix}$. Najděte k nim matice inverzní (pokud existují).

7. Ukažte, že pro matice $K = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ a $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ platí $(K \cdot L)^{-1} = L^{-1} \cdot K^{-1}$.

8. Jsou zadány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

Vypočítejte následující matice (pokud existují):

- $D = B^T \cdot C + A$,

- b) $E = A \cdot C^T \cdot B$,
- c) $F = (C \cdot B)^T + C$,
- d) $G = A^2 \cdot (B \cdot C)^T$,
- e) $H = ((B^T)^2)^T$.

9. Matice A a B jsou typu 4×4 . Matice A má nulový třetí řádek, matice B má nulový první sloupec. Kolik nejméně nul bude obsahovat matice C , pokud

- a) $C = A \cdot B$,
- b) $C = B \cdot A$?

10. Předpokládejme, že Y je invertibilní čtvercová matice typu $n \times n$ a E je jednotková matice typu $n \times n$. Jak bude vypadat matice $Y \cdot E \cdot Y^{-1} \cdot E \cdot Y$?

11. Nalezněte inverzní matici k matici $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (pokud existuje) a výsledek ověřte.

12. Je zadána matice $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ bude matice F invertibilní?
- b) Pokud zvolíme parametr α tak, aby F^{-1} existovala, jak bude vypadat?

13. Zvolte si vhodné nenulové matice P, Q, R typu 3×3 . Ukažte na nich, že

- a) násobení matic není komutativní ($P \cdot Q \neq Q \cdot P$),
- b) násobení matic je asociativní ($P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$).