2. “Nepovinný” domáci úkol z předmětu – Algebra I. cvičení
Červeně – povinný DU

Množiny a relace

1.) Nechť: $A = \{1,2,3,5\}, B = \{a,1,4,b,6\}, C = \{3,2,5,1\}, D = \{3,5,1,a,2\}, E = \{b,e,0,4\}, F = \{5,1,b,a,4\}$ jsou množiny, pro které platí: A,B,C,D,E,F$\subset X$.
a, Které z množin jsou si rovny a proč? (Zapište.)

2.) **Z <u>každé</u> části si vyberte 2 zadáni k řešení:**
Nechť: $A = \{1,2,3,5\}, B = \{a,1,4,b,6\}, C = \{3,2,5,1\}, D = \{3,5,1,a,2\}, E = \{b,e,0,4\}, F = \{5,1,b,a,4\}$ jsou množiny, pro které platí: A,B,C,D,E,F$\subset X$.
Vypište prvky množin:
b, $A \cup B, A \cup E, A \cup F, F \cup A, D \cup B$
c, $A \cap C, D \cap \emptyset, F \cap B, X \cap B,$
d, $A - D, B - C, F - E, E - C,$
e, X, $X \cup \emptyset, X \cap \emptyset, X - \emptyset, \emptyset - X,$
f, $F \cap (B - A), (F - E) - (E - C), (D \cap \emptyset) \cup B,$
Dokažte zda platí:
g, $(F - E) - (E - C) = F - C,$
h, $X \cup G = X - \emptyset.$

3.) Ve měste jsou 3 linky autobusů A, B, C. Na A je 18 zastávek, na B je 20 zastávek, na C 25 zastávek. Počet společných stanic na linkách A,B je stejný jak o na A,C, a to o 2 méně než na B a C. Samostatných zastávek na A je 10, stejně tak na B. Zastávek na A nebo B, kde nestaví C je 22. Kolik je stanic, kde staví všechny 3 autobusy a kolik je všech stanic ve městě?

4.)Dokažte, že $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

5.) **Z <u>každé</u> části si vyberte 1 problém**
Nechť: $A = \{1,u,j,5\}, B = \{a,1,3,8,b,h,d\}, C = \{3,g,4,2,5,1\}, D = \{j\}, E = \{b,e,4,h,a,1\}, F = \{5,2,6,b,a,u,1,4\}$ jsou množiny, pro které platí: A,B,C,D,E,F$\subset X$.Pomocí Vennových diagramů zakreslete doplňky množin (na množine X):
a, $C \cup E, B \cup D, F \cup X,$
b, $F - D, A - B, C - E,$
c, $G \cap \emptyset, C \cap D, X \cap E.$

6.) Pro libovolné množiny A, B, C$\subset X$, zjednodušte:
a, $(A \cup C) \cup (B \cap C)',$
b, $(A \cap C') \cap (B \cup C')'$
c, $(C \cap B)'$

7.) Ze 326 studentů jednoho ročníku university chodí do menzy pravidelně na oběd nebo večeři 116 studentů, 61 studentů dochází právě na jedno z těchto jídel. A přitom na obědy chodí o 47 studentů vice než večeře. Kolik student chodí na obědy i večeře, kolik jen na večeře a kolik jen na obědy?

8.) Rozhodněte, zda množiny A, B, C$\subset X$,platí rovnost:
a, $A \cup (B \cap C) = (A \cap B \cap C)'$
b, $C' \cup (B \cap C) = (B \cap C)'$

Relace

1. **Spočtěte alespoň 3 z a)-i)**

Nechť: $A = \{a, 4,2,3,5\}, B = \{c, 2,4, b\}, C = \{3,4, a, b\}, D = \{3,4,2, a\}, E = \{b, 0,1\}, F = \{5, b, a, 4\}$ jsou množiny. Vypište prvky karézkého součinu:

a, $A \times B$,
d, $A \times F$,
g, $D \times C$
b,$B \times A$,
e, $E \times F$,
h, $B \times E$,
c, $C \times A$,
f, $D \times E$,
i, $D \times A$

2. Je prázdna množina relace mezi množinami A a B?
Pro množiny A a B takové, že: $A = \{a, 4,2,3,5\}, B = \{c, 2,4, b\}$.
Zadejte dvě další libovolné různé relace na kartézkém součinu $A \times B$.

3. Pro stejné množiny A a B takové, že: $A = \{a, 4,2,3,5\}, B = \{c, 2,4, b\}$ zadejte dvě libovolné různé relace na kartézkém součinu $B \times A$.

4. **Spočtěte alespoň 2 z a)-f)**

Nechť: $A = \{4,2,3,5\}, B = \{2,4\}, C = \{1,2,3,4,5\}, D = \{5,4,3,2\}, E = \mathbb{N}, F = \mathbb{R}, G = \mathbb{Z}$. Zadejte **symetrickou** relaci na kartézkém součinu množin:

a, $A \times B$
b, $B \times A$
c, $C \times B$
d, $D \times B$
e, $E \times G$
f, $C \times F$

5. **Spočtěte alespoň 3 z a)-f)**

Nechť: $A = \{4,2,3,5\}, B = \{2,4\}, C = \{1,2,3,4,5\}, D = \{5,4,3,2\}, E = \mathbb{N}, F = \mathbb{R}, G = \mathbb{Z}$. Zadejte **tranzitivní** relaci na kartézkém součinu množin:

a) $C \times A$
d) $D \times E$
g) $D \times A$
b) $B \times A$
e) $E \times G$
h) $B \times C$
c) $A \times C$
f) $C \times F$
i) $C \times E$

6. Ukažte, že relace σ: $a\sigma b \Leftrightarrow (a\ i\ b\ je\ liché) nebo\ (a\ i\ b\ je\ sudé)$: $a, b \in \mathbb{R}$. Ukažte, že relace σ je relace ekvivalence. Určete rozklad, který zadává relace σ na $\mathbb{R}$.

7. Mějme relaci ρ na $\mathbb{Z}$ takovou, že $a\rho b \Leftrightarrow |a + 1| = |b|$. Je relace ρ relace ekvivalence? Dokažte. V případe, že je, určete rozklad, který zadává na množine celých čísel.

Zobrazení

1. Jaká relace (medzi jakými množinami) může být zobrazením?

2. Nechť: $A = \{6,1,4,2,3,5\}, B = \{2,4\}, C = \{1,7,6,3,4,5\}, D = \{5,1,6,4,2\}, E = \mathbb{N}, F = \mathbb{R}, G = \mathbb{Z}$.
Zadejte zobrazení (a ukažte) f tak, ať je surjektivní ale není bijektivní:

a) $f: D \to A$
b) $f: A \to D$
c) $f: E \to B$
d) $f: B \to \mathrm{C}$
e) $f: G \to F$
f) $f: F \to E$

3. Nechť: $A = \{6,1,4,2,3,5\}, B = \{2,4\}, C = \{1,7,6,3,4,5\}, D = \{5,1,6,4,2\}, E = \mathbb{N}, F = \mathbb{R}, G = \mathbb{Z}$.
Zadejte zobrazení f (a ukažte) tak, ať je injektivní ale není bijektivní:

a) $f: B \to A$
b) $f: E \to B$
c) $f: C \to B$
d) $f: B \to \mathrm{E}$
e) $f: G \to A$
f) $f: F \to E$

4. Nechť: $A = \{6,1,4,2,3,5\}, B = \{2,4\}, C = \{1,7,6,3,4,5\}, D = \{5,1,6,4,2\}, E = \mathbb{N}, F = \mathbb{R}, G = \mathbb{Z}$.
Zadejte zobrazení f (a ukažte) tak, ať je bijektivní:

a) $f: A \to A$
b) $f: A \to D$
c) $f: B \to F$
d) $f: A \to \mathrm{C}$
e) $f: E \to G$
f) $f: F \to E$