Tvrzení a důkazy, výrokova logika – DÚ červené

1. Určete zda je věta výrok nebo ne:
   - Londýn je hl. mesto Mexika.
   - Sedni si!
   - Uterý
   - Žralok který štěká nekouše.
   - Je Barak Obama prezidentem USA?
   - Včera pršelo.
   - Dnes je středa a zítra bude pondělí.

2. Rozhodněte jestli jsou nasl. Výroky konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence….
   (a) Jano je z Bratislavy a Fero je z Košíc
   (b) Jana přijde tedy a jen tedy jestli přijde i Lenka
   (c) Plátno je bíle nebo černé.
   (d) Jano a Fero studují v Opavě
   (e) Pokud na měsíci žije slon, pak je fialový.
   (f) Jano a Fero se včera sešli.

3. Jsou dány dva výroky a, b. Sestavte tabulku vyjadřující pravdivostní hodnocení výroků v závislosti na pravdivostním ohodnocení výroků a, b.
   $\neg a$, $\neg b$, $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \Rightarrow b$, $a \Leftrightarrow b$

4. Tabulkovou metodou dokažte platnost De Morganových zákonů
   $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ resp. $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$.
   Dokažte též platnost pravidel pro negování implikace a ekvivalence.

5.Negujte výroky:
   (a) Kočka je bílá.
   (b) Jablíčko není nezdravé.
   (c) Dnes prší a zároveň svítí sluníčko.
   (d) Koupím si jablko nebo hrušku. (Nebo obojí.)
   (e) Jestliže někdo lže, pak také krade.
   (f) Půjdu na oslavu tehdy a jen tehdy, když tam půjde Linda.
   (g) Tahle budova je nejvyšší v okolí.
   (h) $3t = 21$
   (i) $5 \leq 20$
   (j) $6 > 8$
   (k) Každý čtverec je geometrický útvar.
   (l) Alespoň (min./nejméně) 5 lidí neví o čem mluvím.
   (m) Nejvýše 3 studenti nepřišli.
   (n) Alespoň jedno prvočíslo je sudé.
   (o) Tahle rovnica má právě 1 reálny kořen.

6.Jsou dány tři výroky a, b, c. Pomocí vhodné tabulky najděte pravdivostní hodnocení složeného výroku A v závislosti na pravdivostním ohodnocení výroků a, b, c.
   $A= (\neg a \Leftrightarrow (b \wedge c)) \Rightarrow (a \vee \neg(a \wedge b))$

7.Je dán výrok a. Pomocí tohoto výroku s využitím logických operací utvořte co nejjednodušší tautologii a co nejjednodušší kontradikci.

8. Pomocí tabulkové metody dokažte “důležité tautologie” (DÚ: alespoň 5, z toho alespoň 1 se 3 vyroky)

9. Přečtěte správně symbolický zápis kvantifikovaných výroků. Pokuste se též posoudit pravdivostní hodnotu těchto výroků.

(a) $\forall x \in \mathbf{R};\ x^2 \geq 0$

(b) $\exists n \in \mathbf{Z};\ 0 < n \leq 1$

(c) $\forall y \in \mathbf{R};\ |y| > 1 \Rightarrow y^2 > 1$

(d) $\forall x, y \in \mathbf{Z};\ x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0)$

(e) $\forall x \geq 0\ \exists y \leq 0;\ x + y = 0$

(f) $\exists x \geq 0\ \forall y \leq 0;\ x + y = 0$

10. Negujte kvantifikované výroky a je-li to možné, výrok i jeho negaci zapište symbolicky. Posuďte také pravdivostní hodnotu uvedených výroků.

(a) Pro každé reálni číslo (x) platí, že x^2 je větší nebo rovno 0.
(b) Pro každé reálni číslo (x) platí, že x^3 je menší než -1.
(c) Existuje přirozené číslo, takové že $x^2 - 2 = 0$
(d) Existuje právě jedno celé číslo, pre kt. platí, že $x^2 = 4$
(e) Existuje alespoň jeden trojúhelník, který je pravoúhlý.
(f) Druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné.
(g) Úhlopříčky každého čtyřúhelníku jsou navzájem kolmé.
(h) Existuje alespoň jedno reálné číslo, jehož součin s nulou je číslo nenulové.
(i) Každá kočka je černá.
(j) Alespoň šest přirozených čísel splňuje nerovnost $x - 40 < 0$.
(k) Číslo 92 má nejvýše pět dělitelů.
(l) Rovnice $x^5 - x + 2 = 0$ má právě tři kořeny v množině komplexních čísel.

11. Negujte kvantifikované výroky z úlohy 9.

12. Pomocí výrokové logiky a pravdivostné tabulky vyřešte problém:
Nekterý ze žáků A, B, C rozbil okno.
Zjistilo se, že v tom čase nebyl v blízkosti okna A nebo B, když B nebyl u okna, nebyl tam ani A. Žák C byl u okna právě tehdy, když u něho nebyl A.
Kto rozbil okno, pokud víme, že bol práve 1?

13. Pomocí výrokové logiky a pravdivostné tabulky vyřešte problém:
Členové městské rady předložili tyhle návrhy:
Vybudujeme fontánu (F) nebo vyhlídkovou věž (V) nebo památnik (P).
Můžou postavit nejvýše 2, přičemž musí být splnětny podmínky (a)-(c).
(a) $(P \wedge V')'$
(b) $(F \wedge P')'$
(c) $(V \wedge F')'$
Co nakonec postaví?

KVANTIFIKÁTORY

Obecný kvantifikátor: ∀ „každý“; „pro všechna“; „pro každé“
v záporné větě: „žádný“; „nikdo“

Existenční kvantifikátor: ∃ „existuje nějaké“; „existuje alespoň jedno“
∃! „existuje právě jedno“

Při negaci kvantifikovaných výroků se obecný kvantifikátor mění na existenční a naopak.

ν	$\neg\nu$
∀(x∈M): A(x)	∃(x∈M): ¬A(x)
∃(x∈M): A(x)	∀(x∈M): ¬A(x)
Všichni jsou……..	Někteří nejsou………. Alespoň jeden není…..
Někteří jsou…………. Alespoň jeden je……….	Žádní nejsou………
Aspoň n prvků je….	Nejvýše n-1 prvků je……..
Nejvýše n prvků je…….	Alespoň n+1 prvků je…..
Právě n prvků je……..	Nejvýše n-1 prvků nebo alespoň n+1 prvků….

Důležité tautologie

Tyto tautologie budeme často používat, je proto dobré se je naučit zpaměti.

$$\begin{aligned}
p &\Leftrightarrow \neg(\neg p) && (1)\\
(p \wedge q) &\Leftrightarrow (q \wedge p) && (2)\\
(p \vee q) &\Leftrightarrow (q \vee p) && (3)\\
(p \Leftrightarrow q) &\Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p) && (4)\\
\neg(p \wedge q) &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) && (5)\\
\neg(p \vee q) &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) && (6)\\
(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) && (7)\\
(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) && (8)\\
\neg(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) && (9)\\
(p \Leftrightarrow q) &\Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) && (10)\\
((p \wedge q) \wedge r) &\Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)) && (11)\\
((p \vee q) \vee r) &\Leftrightarrow (p \vee (q \vee r)) && (12)\\
((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) &\Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) && (13)\\
((p \wedge q) \vee r) &\Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r)) && (14)\\
((p \vee q) \wedge r) &\Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) && (15)\\
((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) &\Rightarrow (p \Rightarrow r) && (16)
\end{aligned}$$

Tautologie (2-4) jsou komutativity, tautologie (5-6) jsou DeMorganovy zákony, tautologie (8) je obměněná implikace, tautologie (11-13) jsou asociativity, tautologie (14-15) jsou distributivity a tautologie 16 je tranzitivita.

Důkazové techniky

1. Dokažte přímo větu: $\forall x \in \mathbf{N}; x \geq 2 \Rightarrow 6x+3>13$
2. Dokažte nepřímo větu: $\forall x \in \mathbf{Z}$; x^2 je liché $\Rightarrow$ x je liché
3. Dokažte větu z úlohy 2 sporem.
4. Dokažte sporem větu: Všechna prvočísla větší než 2 jsou lichá
5. Dokažte, že pro $\forall a, b > 0$ platí $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
6. Dokažte sporem: Existuje reálne číslo (x), které je menší než 3.
7. Nepriamym dôkazom dokážte vetu: Nech a je prirodzené číslo, potom ak a^2 je číslo deliteľná 3, potom aj a je číslo deliteľná 3.