Pravděpodobnost a Statistika

3. Zápočtová "Písemka" (2016)

!!! Odevzdat NEJPOZDĚJI do 6.1.2017 !!!!

1. Postupne sa skúša spoľahlivosť prístrojov. Ďalší sa skúša len vtedy, ak predchádzajúci bol spoľahlivý. Každý z prístrojov vydrží testovanie s pravdepodobnosťou 0,9.
   Určite pravdepodobnostnú funkciu (pravdepodobnosť pridelenú ku každej náhodnej prem.), distribučnú funkciu a typ náhodnej premennej.

2. Nájdite konštantu k tak, aby funkcia $f(x) = \dfrac{k}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ bola hustotou pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej X.
   Zostrojte tiež grafy $f(x)$ a $F(x)$, vypočítajte $P(-1 < X \leq 1)$.

3. Jav A nastane v každom z 1500 nezávislých pokusov s pravdepodobnosťou 0,2. Pomocou Čebyševovej nerovnosti odhadnite pravdepodobnosť, že počet javov A, kt. nastali, sa odchýli od strednej hodnoty o viac ako 40.

4. Strelec strieľa 300x (nezávisle na sebe) do terča. Pravdepodobnosť zásahu je pri každom výstrele je 2/3. Odhadnite pravdepodobnosť, že strelec sa trafí 185x aÿ 215x.

5. Nech náhodná premenná znamená počet zásahov cieľa pri desiatich nezávisle opakovaných výstreloch tým istým strelcom. Pravdepodobnosť zásahu je pri každom výstrele je 0,8. Nájdite strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X.

6. Nájdite strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X, ktorej hodnoty sa rovnajú súčtu bodiek, pri hode 2 hracími kockami.

7. Nájdite strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X z príkladu (2).

8. Na telefónnu ústredňu prichádza v priemere λ výziev za hodinu. Pravdepodobnosť, že za časový interval dĺžky t príde práve k výziev je $p_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$. Určte pravdepodobnosť toho, že za 2 minúty prídu:
   a) práve 3 výzvy b) aspoň 3 výzvy c) aspoň 1 výzva .

9. Nájdite strednú hodnotu, rozptyl a distribučnú funkciu náhodnej premennej X, ak jej hustota rozdelenia pravdepodobnosti je $f(x) = \frac{3}{2} - x$ ak $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a $f(x) = 0$ inak.

10. Dokážte, že $\emptyset, A$ sú nezávislé pre každú udalosť A, a
    dokážte, že Ω, B sú nezávislé pre každú udalosť B.

11. Nech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$, $C = \{\omega_1, \omega_4\}$.
    Dokážte, že $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$, hoci udalosti A, B, C sú po 2 nezávislé.

12. Hádžeme pravidelnou hracou kockou.

    (a) Vypočítajte, pravdepodobnosť toho, že pri 10 hodoch 6 padne najviac 2x.

    (b) * Odhadnite pravdepodobnosť z príkladu (12a) pomocou Moivrovej-Laplaceovej vety.

    (c) * Vypočítajte presne i približne pravdepodobnosťoho, že pri 100 hodoch 6 padne najviac 10x.

13. * Vypočítajte v prípade hodu kockou pravdepodobnosť $P\left(\left|\frac{k}{100}-\frac{1}{2}\right|<0,1\right)=\bar{p}$ pomocou Moivrovej-Laplaceovej vety a pomocou Čebyševovej nerovnosti ($\bar{p} \geq 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}$).

Celkem (Všetky príklady sú hodnotené rovnakým počtom bodov) **[102b (117*)]**

* označuje bonus, nepovinné príklady

Literatúra

[1] R. Potocký, J. Kalas, J. Komorník, F. Lamoš, and M. Chvíla. *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.* Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry. Alfa, 1991.

[2] Z. Riečanová a kol.. *Numerické metody a matematická štatistika.* Alfa Bratislava, 1987.

[3] M. Budíková. *Sbírka příkladů z teorie pravděpodobnosti.* Univerzita J.E. Purkyně (Brno), 1986.

[4] P. Hebák a J. Kahounová. *Počet pravděpodobnosti v příkladech.* Informatorium, 1994.

[5] A.A. Svešnikov a Kolektiv. *Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí..* 1. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1971.