Pravděpodobnost a Statistika

3. Zápočtová "Písemka" (2017/2018)

!!! Odevzdat NEJPOZDĚJI 8.1.2018 !!!!

1. Postupne sa skúša spoľahlivosť prístrojov. Ďalší sa skúša len vtedy, ak predchádzajúci bol spoľahlivý. Každý z prístrojov vydrží testovanie s pravdepodobnosťou 0,9. Určite náhodnú premennú X, pravdepodobnostnú funkciu (pravdepodobnosť pridelenú ku každej hodnote náhodnej prem.), distribučnú funkciu a typ náhodnej premennej.

2. Nájdite konštantu k tak, aby funkcia $f(x) = \dfrac{k}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ bola hustotou pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej X.
   Zostrojte tiež grafy $f(x)$ a $F(x)$, vypočítajte $P(-1 < X \leq 1)$.

3. Jav A nastane v každom z 1500 nezávislých pokusov s pravdepodobnosťou 0,2. Pomocou Čebyševovej nerovnosti odhadnite pravdepodobnosť, že počet javov A, kt. nastali, sa odchýli od strednej hodnoty o viac ako 40.

4. Strelec strieľa 300x (nezávisle na sebe) do terča. Pravdepodobnosť zásahu pri každom výstrele je 2/3. Odhadnite pravdepodobnosť, že strelec sa trafí 185x až 215x.
   (a) na odhad využite vetu Vety 2.1.4 z Riečanovej (o relat. početnosti) alebo (dôsledok) Laplace-Moivrovu vetu (aproximacia normálnym rozdelením).
   (b) na odhad využite Čebyševovu nerovnosť.

5. * Nech náhodná premenná X znamená počet zásahov cieľa pri desiatich nezávisle opakovaných výstreloch tým istým strelcom. Pravdepodobnosť zásahu je pri každom výstrele je 0,8. Nájdite strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X.

6. Nájdite strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X, ktorej hodnoty sa rovnajú súčtu bodiek, pri hode 2 hracími kockami.

7. Nájdite strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X z príkladu (2).

8. * Na telefónnu ústredňu prichádza v priemere λ výziev za hodinu. Pravdepodobnosť, že za časový interval dĺžky t príde práve k výziev je $p_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$. Určte pravdepodobnosť toho, že za 2 minúty prídu:
   a) práve 3 výzvy   b) aspoň 3 výzvy   c) aspoň 1 výzva   .

9. * Nájdite strednú hodnotu, rozptyl a distribučnú funkciu náhodnej premennej X, ak jej hustota rozdelenia pravdepodobnosti je $f(x) = \frac{3}{2} - x$ ak $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a $f(x) = 0$ inak.

10. Dokážte, že $\emptyset, A$ sú nezávislé pre každú udalosť A, a
    dokážte, že Ω, B sú nezávislé pre každú udalosť B.

11. Nech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$, $C = \{\omega_1, \omega_4\}$.
    Dokážte, že $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$, ale udalosti A, B, C sú po 2 nezávislé.

12. S Vašim kamarátom v USA hráte stolnú hru cez telefón. Keď je na ťahu kamarát, hodí kockou (Vy to nemôžete vidieť) a povie, čo padlo. Samozrejme, toto je skvelá príležitosť na podvádzanie :) Zostavíte nulovú hypotézu, že kamarát hrá fér (prezumpcia neviny), ale rozhodnete sa zamietnuť túto hypotézu, ak Váš kamarát v prvýh 10 hodoch hodí viac ako 5 x šestku.
    Aká je pravdepodobosť chyby 1. druhu?

13. * Váš kamarát Vám povie, že gejzír Old Faithful "vystrelí" každých 90 minút (je ako hodinky).
    V náhodne zvolený čas dorazíte ku gejzíru ale máte iba 80 minút, kým Vám vyprší parkovací lístok (teda kým musíte odísť). 80 min. uplynulo a gejzír nezačal striekať, takže svojho kamaráta prehlásite za klamára. Aká je pravdepodobosť chyby 1. druhu?

14. Pepa má 2 balíčky kariet na Poker, jeden je férový (52 kariet + 2 žolíky) a 2. balíček má tiež 54 kariet, ale Pepa vymenil všetky srdcové karty za žolíky (teda má 15 žolíkov). Idete si spolu zahrať Poker (s nulovou hypotézou, že Pepa doniesol férový balíček), ale ste trochu na pochybách, takže sa rozhodnete hypotézu otestovať: Ak prvých 5 kariet ktoré dostanete (prvých 5 kariet dostávate naraz) zahŕňa 2 alebo viac žolíkov, zastavíte hru a vyhlásite balíček za neférový.
    Aké sú pravdepodobnosti chýb 1. a 2. druhu?

15. Hádžeme pravidelnou hracou kockou. Vypočítajte, pravdepodobnosť toho, že pri 10 hodoch 6 padne najviac 2x.

16. Hádžeme pravidelnou hracou kockou. Vypočítajte presne i približne pravdepodobnosť toho, že pri 100 hodoch 6 padne najviac 10x. (Pomôcka: využite L-M vetu)

17. Peter hrá (sám) kartovú hru "21 vyhráva" (Hodnoty kariet: 7,8,9,10, J=1, Q=2, K=3, A=11).
    Hráč ťahá karty, až kým sa nerozhodne, že má dostatočne veľký súčet, pokiaľ je súčet jeho kariet presne 21, vyhral, pokiaľ je menej ako 21 "remízoval" a pokiaľ súčet prekročí 21, prehral.
    Peter si chce vyskúšať novú stratégiu: vždy vytiahne 3 karty (pri jednotlivých ťahoch ich nesleduje) a potom ťah ukončí. Aká je pri jednom takomto ťahu pravdepodobnosť výhry?

Celkem (Všetky príklady sú hodnotené rovnakým počtom (8)bodov) **[104b (136*)]**

*nepovinné príklady

V2.1.4 **(Riečanová [2]):** Nech Ω_0 je konečná neprázdna množina, P_0 je pravdepodobnosť na Ω_0. Nech $\Omega_n = \Omega_0 \times \Omega_0 \times \cdots \times \Omega_0$ (n-krát) a P je pravdepodobnosť na Ω_n (klasic. spôs.) Nech $A \subset \Omega_0, P_0(A) = p, k_n$ je absolútna početnosť množiny A, $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Potom

$$P\left(\left\{(x_1, \cdots, x_n) : \left|\frac{k_n(x_1, \cdots, x_n)}{n} - p\right| < \varepsilon\right\}\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

L-M **Veta** ([2]): Nech X_n je náhodná premenná s binomickým rozdelením a s prarametrami $n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$. Potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \Phi(x), \qquad \text{kde } q = 1 - p.$$

L-M **Dôsledok** ([2]): Pre "dostatočne veľké n" platí:

$$P(k_1 \leq X_n < k_2) = P\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Literatúra

[1] R. Potocký, J. Kalas, J. Komorník, F. Lamoš, and M. Chvíla. *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.* Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry. Alfa, 1991.

[2] Z. Riečanová a kol.. *Numerické metody a matematická štatistika.* Alfa Bratislava, 1987.

[3] M. Budíková. *Sbírka příkladů z teorie pravděpodobnosti.* Univerzita J.E. Purkyně (Brno), 1986.

[4] P. Hebák a J. Kahounová. *Počet pravděpodobnosti v příkladech.* Informatorium, 1994.

[5] A.A. Svešnikov a Kolektiv. *Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí..* 1. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1971.