

# Početnosť, testovanie hypotéz, náhodná premenná, distribučné funkcie... - Príklady

1. V závode na výrobu ložiskových guľičiek chceli zistiť podiel nepodarkov  $p$  v celkovej výrobe. Pri výstupnej kontrole prekontrolovali 100 guľičiek, z kt. 87 bolo dobrých a 13 nepodarkov. S akou pravdepodobnosťou sa  $p$  nachádza v intervale  $(0,03; 0,23)$ ?
2. Žiarovka je vyhovujúca, ak svieti viac ako 2000 hodníc. Koľko žiaroviek majú kontrolóri veľkoobchodu skontrolovať, aby sa odhadovaná hodnota podielu nepodarkov nelíšila od skutočnej o viac ako 0,1 s istotou 90%?
3. V meste je 900 domácností s automatickými práčkami. Pravdepodobnosť, že práčka je zapojená v čase 15-18. hod. je 0,1 pre každú z nich. Nájdite interval, v ktorom sa počet práčok zapojených od 15 do 18tej hodiny nachádza s pravdepodobnosťou 0,95.  
(pozn. hľadáme  $\varepsilon$  a teda interval, do kt. patrí hodnota  $k_n(x)$ )
4. Štandardný postup liečenia určitej choroby dobytká vedie k vyliečeniu polovice všetkých prípadov. O novom spôsobe sa tvrdí že je omnoho účinnejší. (Hypotéza je, že pravdepodobnosť vyliečenia je 0,9). Nový spôsob sa má vyskúšať na 10 chorých kusoch dobytká. Použijeme tento testovací postup: Ak sa vylieči nanajviš 7 kráv prijmeme hypotézu, že  $p = 0,5$ , v opačnom prípade prijmeme hypotézu  $p = 0,9$ . Nájdite pravdepodobnosť chýb 1. a 2. druhu.
5. Liek sme skúšali u 100 pacientov; u 59 pacientov bol úspešný. Na hladine významnosti 0,05 testuje hypotézu, že pravdepodobnosť  $p$  úspešnosti lieku je 0,5.  
(Ak počítate ručne, stačí spočítať prvých 10 hodnôt namiesto 59-100, hodnota je dostatočne blízko tej skutočnej)
6. Boli ste unesení neznámou skupinou. Ráno sa zobudíte a chcete vedieť v ktorej krajine sa nachádzate. Zistíte, že je to buď USA alebo ČR. Viete, že v CZ, dostanete na obed polievku s pravdepodobnosťou 90%, ale v USA len 30%. Hypotéza teda je, že sa nachádzate v CZ ak počas najbližších 10 dní dostanete aspoň 7x polievku, v opačnom prípade ste v USA.  
Nájdite pravdepodobnosť chýb 1. a 2. druhu.
7. V pracovni máte poličku, na ktorej bolo abecedne zoradených 10 kníh (zvonku vyzerajú všetky rovnako a názov je vo vnútri). Cez víkend polička spadla a všetky knihy skončili na zemi. Upratovačka ich ráno uložila naspäť do poličky (náhodne). Vytvoríte hypotézu: Skontrolujete prvé 3 knihy a ak budú v abecednom poradí (tak ako predtým, takže abecedne a ešte tie, kt. tam boli pred pádom poličky), predpokladáte, že knihy sú uložené opäť abecedne, v opačnom prípade hypotézu zamietnete.  
Nájdite pravdepodobnosť chýb 1. a 2. druhu.
8. V kozmickej rakete je prístroj, ktorý je zložený zo 4 blokov ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ ). Každý z týchto blokov sa pokazí, ak do neho spadne aspoň 1 elementárna častica. Porucha celého prístroja nastane pri poruche bloku  $A_1$ , alebo pri súčasnej poruche všetkých 3 zvyšných blokov ( $A_2, A_3, A_4$ ). Určite distribučnú funkciu  $F(x)$  náhodného počtu častíc  $X$ , kt. spôsobia jeho poruchu, keď sa dostanú do prístroja. Častica, kt. sa dostala do prístroja, padne do bloku  $A_1$  s pravdepodobnosťou  $p_1 = 0,4$  a do blokov  $A_2, A_3, A_4$  s pravdepodobnosťami  $p_2 = p_3 = p_4 = 0,2$ .  
Určite tiež o akú náhodnú premennú sa jedná. (diskrétna / spojitá)
9. Určite distribučnú funkciu náhodného počtu dosiahnutých košov v hre, ak pri jednom hode, hráč zasiahne kôš s pravdepodobnosťou 0,3 (pocas hry byl ucinen 1 hod). Určite aj typ náhodnej premennej.

10. Nech náhodná premenná znamená počet zásahov cieľa pri 4 nezávisle opakovaných výstreloch tým istým strelcom, u kt. pravdepodobnosť zásahu cieľa je  $p = 0,8$ . Určte distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$  a nakreslite (načrtnite) jej graf. Určte aj typ náhodnej premennej.
11. Závary na železničnom priecestí sú spustené pri prechode vlaku za čas  $t$  ( $t > 0$ ). Nech náhodná premenná znamená čas, za kt. je pri závorách zdržané vozidlo, ktoré príde náhodne počas spustenia závor na železničný prechod. Nájdite distribučnú funkciu náhodnej premennej a nakreslite jej graf. Vypočítajte pravdepodobnosť, že vozidlo bude zdržané na čas menší ako  
A)  $t/2$ , B)  $t/3$ .
12. Hádzeme (naraz) dvoma hracími kockami. Náhodnou premennou bude absolútna hodnota rozdielu hodnôt padnutých na kockách ( $X(a, b) = |a - b|$ ). Nájdite distribučnú funkciu a načrtnite jej graf, určite o akú náhodnú premennú sa jedná.
13. V kasíne vsádzame na červenú farbu v rulete (pravdepodobnosť výhry je  $18/38$ ). Hru skončíme po prvej výhre. Náhodnou premennou ( $X(\omega)$ ) bude počet stávk, kt. sme urobili kým nevyhráme (vrátane). Nájdite distribučnú funkciu tejto náhodnej premennej a načrtnite jej graf. Určte tiež o akú náhodnú premennú sa jedná.

## Literatúra

- [1] R. Potocký, J. Kalas, J. Komorník, F. Lamoš, and M. Chvíla. *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky*. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry. Alfa, 1991.
- [2] Z. Riečanová a kol.. *Numerické metody a matematická štatistika*. Alfa Bratislava, 1987.
- [3] M. Budíková. *Sbírka příkladů z teorie pravděpodobnosti*. Univerzita J.E. Purkyně (Brno), 1986.
- [4] P. Hebák a J. Kahounová. *Počet pravděpodobnosti v příkladech*. Informatorium, 1994.
- [5] A.A. Svešnikov a Kolektiv. *Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí*. 1. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1971.

## Výsledky:

- 1)  $\geq 0,75$
- 2) 250
- 3)  $k_n \in (49.75; 130.25)$  nebo  $k_n \in [50; 130]$  práčiek.
- 4) Pravdepodobnosť zamiet. 1.hypotézy  $p = 0.5$  je  $P(k_{10} > 7 | p = 0.5) = 0.05470$ , pre zamietnutie 2. hyp.  $P(k_{10} \leq 7 | p = 0.9) = 0.07019$ .
- 5)  $P(k_{100} \geq 59 | p = 0.5) = 0.044313 < 0.05$  hypotézu zamietneme.
- 6)  $P(k_{10} \geq 7 | p = 0.3[USA]) = 0.01060$ ,  $P(k_{10} < 7 | p = 0.9[CZ]) = 0.011279$
- 7) Hyp.: Knihu sú v abecednom poradí.  
- chyba 1.druhu:  $P(\text{prvé 3 knihy nie sú v abec. poradí} | \text{hyp. platí}) = 0$   
- chyba 2.druhu:  $P(\text{prvé 3 knihy sú v abec. poradí} | \text{hyp. neplatí}) = \frac{7!-1}{10!-1} \approx 0.00139$
- 8)  $F(x) = 1 - 3 * \frac{(2^n)(2^n - 1)}{10^n}$ , kde  $n$  je najv. prirodz. číslo menšie ako  $x$ . (diskrétna)

9)  $F(x) = 0; x \leq 0, \quad F(x) = 0,7; 0 < x \leq 1, \quad F(x) = 1; x > 1.$ (diskrétna)

10)  $F(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \binom{4}{i} * 0,2^{4-i} * 0,8^i \right]$  pre  $n = 1, 2, 3, 4$  je najmen. prir. číslo  $\geq x$ .

Pre  $x \leq 0 \quad F(x) = 0, \quad x > 4 \quad F(x) = 1.$ (diskrétna)

11)  $F(x) = 0$  ak  $x < 0, \quad F(x) = x/t$  ak  $x \leq t \quad F(x) = 1$  ak  $x > t.$  (spojiá), A)  $1/2,$  B)  $1/3$

12) bolo na cvičení

13)  $F(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{18}{38} \right)^i$  pre  $n = 2, 3, 4, 5 \dots$  kde  $n$  je najmen. celé číslo  $\geq x.$  Pre  $x \leq 1 \quad F(x) = 0.$ (diskrétna)