

7.2. Svazově uspořádané množiny a svazy

Definice 7.2.1. Uspořádaná množina je *svazově uspořádaná*, jestliže každá její dvouprvková podmnožina má infimum i supremum.

Každá konečná podmnožina svazově uspořádané množiny má infimum i supremum.

Příklad. (1) Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ svazově uspořádaná množina, přičemž pro libovolné $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ $\inf\{Y, Z\} = Y \cap Z$ a $\sup\{Y, Z\} = Y \cup Z$.

(2) $(\mathbb{N}, |)$ je svazově uspořádaná množina, přičemž $\inf\{x, y\}$ je největší společný dělitel čísel x, y , $\sup\{x, y\}$ je nejmenší společný násobek čísel x, y .

(3) $(\{1, 3, 5, 6, 9, 10, 12\}, |)$ není svazově uspořádaná množina.

(4) Každý řetězec je svazově uspořádaná množina, přičemž $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ je menší z prvků x, y , $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$ je větší z prvků x, y . $\square$

Definice 7.2.2. Množina X se dvěma binárními operacemi $\wedge$ a $\vee$ je *svaz*, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ platí

$$\begin{array}{lll} x \wedge y = y \wedge x, & x \vee y = y \vee x, & (\text{komutativita } \wedge \text{ a } \vee) \\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), & (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), & (\text{asociativita } \wedge \text{ a } \vee) \\ x \wedge (y \vee x) = x, & x \vee (y \wedge x) = x. & (\text{zákon absorpce}) \end{array}$$

Binární operace $\wedge$ je *průsek*, binární operace $\vee$ je *spojení*.

Příklad. (1) Pro libovolnou množinu X množina $\mathcal{P}(X)$ s operacemi $\cap$ a $\cup$ je svaz.

(2) Množina $\mathbb{N}$ s operacemi D a N , kde $x D y$ je největší společný dělitel čísel x, y a $x N y$ je nejmenší společný násobek čísel x, y , je svaz.

(3) Množina $\mathbb{R}$ s operacemi $\min$ a $\max$ je svaz.

(4) Množina $\{0, 1\}$ pravdivostních hodnot s operacemi konjunkce a disjunkce je svaz. $\square$

Tvrzení 7.2.1. *Bud' $(X, \wedge, \vee)$ svaz. Pro libovolné $x \in X$ platí*

$$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x. \quad (\text{idempotentnost } \wedge \text{ a } \vee)$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} x \wedge x &= & (\text{zákon absorpce}) \\ &= x \wedge (x \vee (y \wedge x)) = & (\text{komutativita } \vee) \\ &= x \wedge ((y \wedge x) \vee x) = & (\text{zákon absorpce}) \\ &= x. \end{aligned}$$

Druhou část tvrzení necháme jako cvičení. $\square$

Ve svazově uspořádané množině X pro každé x, y existují $\inf\{x, y\}$ a $\sup\{x, y\}$ a jsou jednoznačně určena, proto můžeme na X definovat binární operace $\wedge$ a $\vee$:

$$x \wedge y := \inf\{x, y\}, \quad x \vee y := \sup\{x, y\}.$$

Podle následujícího tvrzení každá svazově uspořádaná množina s těmito operacemi je svaz.

Tvrzení 7.2.2. *Svazově uspořádaná množina X s binárními operacemi $\wedge$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$, $\vee$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$, je svaz.*

Důkaz. Cvičení.

Asociativita $\vee$: Návod: Ukažte, že $x \vee (y \vee z) = \sup\{x, y, z\} = (x \vee y) \vee z$. $\square$

Cvičení. Dokažte, že $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. (Vlevo nezáleží na uzavorkování). $\square$

Podle následujícího tvrzení každý svaz je svazově uspořádaná množina.

Tvrzení 7.2.3. *Bud' $(X, \wedge, \vee)$ svaz.*

- (1) *Položme $x \leq_\wedge y$ právě tehdy, když $x \wedge y = x$. Pak $\leq_\wedge$ je uspořádání na X .*
- (2) *Položme $x \leq_\vee y$ právě tehdy, když $x \vee y = y$. Pak $\leq_\vee$ je uspořádání na X .*
- (3) *Uspořádání $\leq_\wedge$ je shodné s uspořádáním $\leq_\vee$ a $(X, \leq_\wedge)$ je svazově uspořádaná množina, přičemž*

$$\inf\{x, y\} = x \wedge y, \quad \sup\{x, y\} = x \vee y.$$

Důkaz. Cvičení. $\square$

Svazy i svazově uspořádané množiny tedy můžeme chápat jak jako algebraické struktury tak jako uspořádané množiny. Uspořádání totiž jednoznačně určuje algebraickou strukturu a algebraická struktura zase jednoznačně určuje uspořádání.

Bud' $(X, \wedge, \vee)$ svaz. Identity v definici svazu jsou symetrické vzhledem k vzájemné záměně $\wedge$ a $\vee$, proto $(X, \vee, \wedge)$ je také svaz. Nazývá se *duální svaz* a značí se X^* .

Cvičení. Ověřte, že duální svaz má duální uspořádání. $\square$

Tvrzení 7.2.4. *Bud' X svaz. Pro každé $x, a, b \in X$ platí*

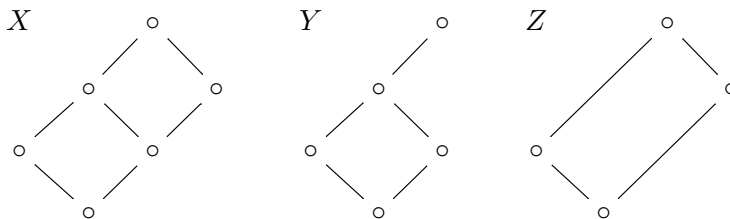
- (i) *jestliže $a \leq b$, pak $a \wedge x \leq b \wedge x$;*
- (ii) *jestliže $a \leq b$, pak $a \vee x \leq b \vee x$;*
- (iii) *jestliže $x \leq a$, $x \leq b$, pak $x \leq a \wedge b$;*
- (iv) *jestliže $x \geq a$, $x \geq b$, pak $x \geq a \vee b$.*

Důkaz. (i) Nechť $a \leq b$, pak $a \wedge b = a$, načež $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge b \wedge x = a \wedge x$; odtud tvrzení. (ii) Cvičení. (iii) a (iv) plynou ihned z definice infima a suprema (cvičení). $\square$

Obsahuje-li podmnožina svazu všechna infima a suprema všech dvojic svých prvků, je to také svaz.

Definice 7.2.3. *Podsvaz svazu $(X, \wedge, \vee)$ je podmnožina $Y \subseteq X$ taková, že pro každé $x, y \in Y$ platí $x \wedge y \in Y$ a $x \vee y \in Y$.*

Příklad. Svaz X a jeho podsvazy Y a Z :



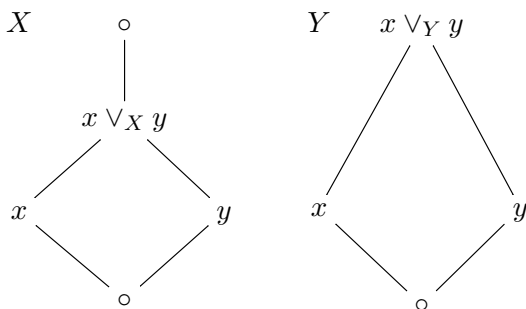
$\square$

Cvičení. (1) Každá podmnožina řetězce je podsvaz.

(2) Každá podmnožina svazu, která je řetězcem, je podsvaz. $\square$

Podmnožina svazu může být svazem vzhledem k indukovanému uspořádání, aniž by byla podsvazem.

Příklad. Svaz X a jeho podmnožina Y , která je svazem, ale není podsvazem.



Supremum $x \vee_Y y$ v Y je různé od suprema $x \vee_X y$ v X . $\square$

7.3. Úplné svazy

Definice 7.3.1. Svaz je *úplný*, má-li každá jeho podmnožina supremum i infimum.

Příklad. (1) Každý konečný svaz je úplný a platí $\inf\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$, $\sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$.

(2) Svaz $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ je úplný. Infima jsou průniky, suprema jsou sjednocení.

(3) Svaz $(\mathbb{N}, \leq)$ není úplný. Schází například supremum celé množiny $\mathbb{N}$. $\square$

Každý úplný svaz má největší prvek, je to jeho supremum, i nejmenší prvek, je to jeho infimum.

Tvrzení 7.3.1. *Bud' X uspořádaná množina, jejíž každá podmnožina má infimum. Pak X je úplný svaz.*

Důkaz. Stačí ukázat, že každá podmnožina má supremum. Bud' $Y \subseteq X$. Označme Z množinu všech horních závor množiny Y a položme $s = \inf Z$. Dokažme, že $s = \sup Y$.

Každý prvek množiny Z je horní závora množiny Y , takže každý prvek množiny Y je dolní závora množiny Z . Jelikož s je největší dolní závora množiny Z , tak $y \leq s$ pro každé $y \in Y$, čili s je zároveň horní závora množiny Y . A když $s \in Z$ a současně s je (největší) dolní závora množiny Z , je to nejmenší prvek množiny Z , čili nejmenší horní závora množiny Y . $\square$

Příklad. Předpoklad, že každá (i prázdná) podmnožina množiny X má infimum, znamená, že X má největší prvek. Například $(\mathbb{N}, \leq)$ není úplný svaz, přestože každá neprázdná podmnožina má infimum. $\square$

Příklad. Bud' G grupa a $P(G)$ množina všech podgrup grupy G . Pak $(P(G), \subseteq)$ je úplný svaz.

Bud' $\{A_\iota \mid \iota \in I\} \subseteq P(G)$, tedy nějaký systém podgrup grupy G . Potom $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota$ je také podgrupa (cvičení), která je zároveň $\inf\{A_\iota \mid \iota \in I\}$ (cvičení). Podle předchozího

tvrzení je $(P(G), \subseteq)$ úplný svaz. Proto existuje i $\sup\{A_\iota \mid \iota \in I\}$ a je to průnik všech podgrup, které obsahují všechny podgroupy A_ι .

Příklad je zformulován pro grupy, ale jeho analogie platí i pro jiné algebraické struktury. $\square$

Cvičení. Označme $E(X)$ množinu všech relací ekvivalence na množině X . Protože $E(X) \subset \mathcal{P}(X \times X)$, vzniká na $E(X)$ indukované uspořádání. Dokažte, že $E(X)$ je úplný svaz. $\square$

8. HOMOMORFISMY

8.1. Homomorfismy a izomorfismy grup

8.1.1. Homomorfismy grup

Definice 8.1.1. Buďte $(X, *, e_X, {}^{-1})$, $(Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$ grupy. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je *homomorfismus grup*, jestliže

- (i) pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \diamond f(x_2)$,
- (ii) $f(e_X) = e_Y$,
- (iii) pro každé $x \in X$ platí $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Značí se $f: (X, *, e_X, {}^{-1}) \rightarrow (Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$.

Příklad. (1) $f_2: (\mathbb{Z}, +, 0, -) \rightarrow (\mathbb{Z}, +, 0, -)$, $n \mapsto 2n$, je homomorfismus grup.

(2) Buď X grupa, $\tilde{X}$ faktorová grupa. Potom zobrazení $X \rightarrow \tilde{X}$, $x \mapsto [x]$ (faktorová projekce) je homomorfismus grup.

(3) Buďte $X = \{0, 1, 2, 3\}$ a $Y = \{0, 1\}$ s binárními operacemi $+$ takovými, že

$+$	0	1	2	3		$+$	0	1
0	0	1	2	3		0	0	1
1	1	2	3	0	a	0	0	1
2	2	3	0	1		1	1	0
3	3	0	1	2				

Potom množiny X a Y s těmito operacemi jsou grupy. Zobrazení $X \rightarrow Y$, $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 0$, $3 \mapsto 1$, je homomorfismus těchto grup. $\square$

Tvrzení 8.1.1. Buďte $(X, *, e_X, {}^{-1})$, $(Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$ grupy. Buď $f: X \rightarrow Y$ zobrazení takové, že pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \diamond f(x_2)$. Pak f je homomorfismus grup $(X, *, e_X, {}^{-1}) \rightarrow (Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$.

Důkaz. Podmínka (i) z definice homomorfismu grup je podle předpokladu splněna.

Ukažme, že $f(e_X) = e_Y$.

$$\begin{aligned}
 f(e_X) &= f(e_X) \diamond e_Y = \\
 &= f(e_X) \diamond f(e_X) \diamond (f(e_X))^{-1} = \\
 &= f(e_X * e_X) \diamond (f(e_X))^{-1} = \\
 &= f(e_X) \diamond (f(e_X))^{-1} = \\
 &= e_Y.
 \end{aligned}$$

Ukažme, že $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ pro každé $x \in X$.

$$\begin{aligned}
 f(x^{-1}) \diamond f(x) &= f(x^{-1} * x) = f(e_X) = e_Y, \\
 f(x) \diamond f(x^{-1}) &= f(x * x^{-1}) = f(e_X) = e_Y.
 \end{aligned}$$

Takže $f(x^{-1})$ je inverze k $f(x)$. $\square$

Cvičení. Buď $f: X \rightarrow Y$ homomorfismus grup. Označme

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Pak $\text{Im } f$ je podgrupa v Y . $\square$

Tvrzení 8.1.2. *Bud'te $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ homomorfismy grup. Pak jejich složení $g \circ f: X \rightarrow Z$ je homomorfismus grup.*

Důkaz. Bud'te $(X, *, e_X, {}^{-1}), (Y, \diamond, e_Y, {}^{-1}), (Z, \cdot, e_Z, {}^{-1})$ grupy. Pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1 * x_2) &= g(f(x_1 * x_2)) = \\ &= g(f(x_1) \diamond f(x_2)) = \\ &= g(f(x_1)) \cdot g(f(x_2)) = \\ &= (g \circ f)(x_1) \cdot (g \circ f)(x_2). \end{aligned}$$

Zbytek vyplývá z předchozího tvrzení. □

8.1.2. Izomorfismy grup

Definice 8.1.2. Bijektivní homomorfismus grup je *izomorfismus grup*.

Tvrzení 8.1.3. *Bud' $f: X \rightarrow Y$ izomorfismus grup. Pak $f^{-1}: Y \rightarrow X$ je izomorfismus grup.*

Důkaz. Bud'te $(X, *, e_X, {}^{-1}), (Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$ grupy. Inverzní zobrazení je bijektivní. Pro libovolné $y_1, y_2 \in Y$ označme $x_1 = f^{-1}(y_1)$ a $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Takže $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Potom

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1 \diamond y_2) &= f^{-1}(f(x_1) \diamond f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 * x_2)) = x_1 * x_2 = \\ &= f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

Zbytek vyplývá z Tvrzení 8.1.1. □

Příklad. (1) Každá identita je izomorfismus.

(2) Označme $\mathbb{R}_+$ množinu všech kladných reálných čísel. Pak $(\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1})$ je grupa (cvičení). Zobrazení $\exp: (\mathbb{R}, +, 0, -) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1}), x \mapsto e^x$ je homomorfismus grup, protože pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = (\exp x) \cdot (\exp y)$. Tento homomorfismus je bijektivní, tedy i izomorfismus.

Inverzní izomorfismus je logaritmus

$$\ln: (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1}) \rightarrow (\mathbb{R}, +, 0, -). \quad \square$$

Definice 8.1.3. Grupy X, Y jsou *izomorfní*, jestliže existuje izomorfismus $X \rightarrow Y$. Zapisujeme $X \cong Y$.

Tvrzení 8.1.4. *Pro libovolné grupy X, Y, Z platí*

- (i) $X \cong X$ (reflexivita),
- (ii) jestliže $X \cong Y$, pak $Y \cong X$ (symetrie),
- (iii) jestliže $X \cong Y$ a $Y \cong Z$, pak $X \cong Z$ (tranzitivita).

Důkaz. Cvičení. □

Příklad. $(\mathbb{R}, +, 0, -) \cong (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1})$. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$, zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto a^x$ je izomorfismus $(\mathbb{R}, +, 0, -) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1})$. Ověřte. □

Cvičení. Bud' $h: X \rightarrow Y$ homomorfismus grup.

- (1) Ukažte, že relace $\sim$ zadaná předpisem

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow h(x_1) = h(x_2)$$

je kongruence na grupě X .

- (2) Ukažte, že faktorová grupa $\tilde{X}$ podle kongruence $\sim$ je izomorfní podgrupě $\text{Im } h$.
Návod: $\tilde{X} \rightarrow \text{Im } h, [x] \mapsto h(x)$. $\square$

8.2. Homomorfismy a izomorfismy polí

Definice 8.2.1. Buďte P, Q pole. Zobrazení $f: P \rightarrow Q$ je *homomorfismus polí*, jestliže

- (i) pro každé $p_1, p_2 \in P$ platí $f(p_1 + p_2) = f(p_1) + f(p_2)$,
- (ii) $f(0) = 0$,
- (iii) pro každé $p \in P$ platí $f(-p) = -f(p)$,
- (iv) pro každé $p_1, p_2 \in P$ platí $f(p_1 \cdot p_2) = f(p_1) \cdot f(p_2)$,
- (v) $f(1) = 1$,
- (vi) pro každé $p \in P, p \neq 0$, platí $f(p^{-1}) = (f(p))^{-1}$.

O zobrazeních polí platí následující tvrzení obdobné Tvrzení 8.1.1 o zobrazeních grup.

Tvrzení 8.2.1. Buďte P, Q pole. Buď $f: P \rightarrow Q$ zobrazení takové, že pro každé $p_1, p_2 \in P$ platí

- (i) $f(p_1 + p_2) = f(p_1) + f(p_2)$,
- (ii) $f(p_1 \cdot p_2) = f(p_1) \cdot f(p_2)$,
- (iii) $f(1) \neq 0$.

Pak f je homomorfismus polí $P \rightarrow Q$.

Důkaz. Cvičení. $\square$

Definice 8.2.2. Bijektivní homomorfismus polí je *izomorfismus polí*. Pole jsou *izomorfní*, jestliže mezi nimi existuje izomorfismus.

Příklad. Dvouprvkové pole $\{0, 1\}$ je izomorfní s polem $\mathbb{Z}_2$. Izomorfismem je zobrazení $0 \mapsto [0]_2, 1 \mapsto [1]_2$. $\square$

8.3. Izotonní zobrazení, homomorfismy a izomorfismy svazů

8.3.1. Izotonní zobrazení a izomorfismy uspořádaných množin

Definice 8.3.1. Buďte $(X, \leq), (Y, \leq)$ uspořádané množiny. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je *izotonní*, jestliže platí implikace

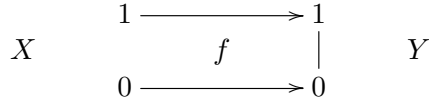
$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Je-li zobrazení f bijektivní a f i f^{-1} jsou izotonní, pak f je *izomorfismus uspořádaných množin* a uspořádané množiny $(X, \leq), (Y, \leq)$ jsou *izomorfní*.

Příklad. Identické zobrazení $\text{id}: (\mathbb{N}, |) \rightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ je izotonní. Skutečně, jestliže $a \mid b$, pak $b = na$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, ale $n \geq 1$, a proto $b = na \geq a$.

Inverzní zobrazení $\text{id}: (\mathbb{N}, \leq) \rightarrow (\mathbb{N}, |)$ není izotonní, protože neplatí implikace $x \leq y \Rightarrow x \mid y$ (například $2 \leq 3$, ale $2 \nmid 3$). $\square$

Příklad. Buďte $X = Y = \{0, 1\}$ s uspořádáními a zobrazením f podle obrázku:



Tedy $f: X \rightarrow Y$ je identické zobrazení. Pak f je izotonní bijekce, jejíž inverze f^{-1} není izotonní. $\square$

Cvičení. Složení izotonních zobrazení je izotonní zobrazení. $\square$

8.3.2. Homomorfismy a izomorfismy svazů

Definice 8.3.2. Buďte $(X, \wedge, \vee)$, $(Y, \wedge, \vee)$ svazy. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je *homomorfismus svazů*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1) \wedge f(x_2)$$

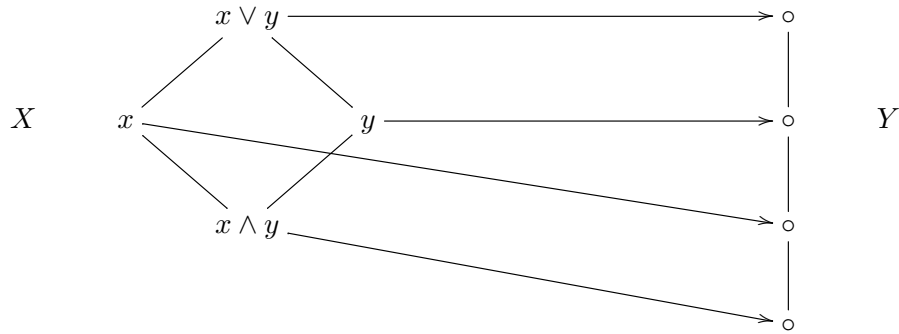
$$f(x_1 \vee x_2) = f(x_1) \vee f(x_2).$$

Tvrzení 8.3.1. Každý homomorfismus svazů je izotonní zobrazení.

Důkaz. Buďte $(X, \wedge, \vee)$, $(Y, \wedge, \vee)$ svazy, $f: X \rightarrow Y$ homomorfismus a $x_1, x_2 \in X$ takové, že $x_1 \leq x_2$, tedy $x_1 \wedge x_2 = x_1$. Potom $f(x_1) \wedge f(x_2) = f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1)$, tedy $f(x_1) \leq f(x_2)$. $\square$

Izotonní zobrazení svazů však nemusí být homomorfismus svazů:

Příklad. Buď f zobrazení podle obrázku:



Pak f je izotonní zobrazení svazů, ale není homomorfismus svazů, protože

$$f(x) \vee f(y) = f(y) \neq f(x \vee y).$$

$\square$

Definice 8.3.3. Bijektivní homomorfismus svazů je *izomorfismus svazů*.

Cvičení. Buď f zobrazení svazů. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

- (1) f je izomorfismus uspořádaných množin;
- (2) f je izomorfismus svazů.

$\square$