4. přednáška, 20. 10. 2026

1.5.2. Hodnost matice

Definice 1.5.3. *Hodnost* matice je maximální délka lineárně nezávislé posloupnosti jejích řádků. Hodnost matice A značíme $\operatorname{rank} A$.

Mějme matici A typu $m \times n$ s řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$. Všechny posloupnosti těchto řádků jsou prázdná posloupnost $\emptyset$, posloupnosti délky 1: $(A^1_\circ), (A^2_\circ), \dots, (A^m_\circ)$, posloupnosti délky 2: $(A^1_\circ, A^1_\circ), (A^1_\circ, A^2_\circ), \dots, (A^m_\circ, A^{m-1}_\circ), (A^m_\circ, A^m_\circ), \dots$, posloupnosti délky m, $\dots$, nekonečné posloupnosti. Z těchto posloupností vybereme ty, které jsou lineárně nezávislé. U každé z nich si poznamenáme její délku a maximální z těchto délek je hodnost matice A.

Máme-li matici s m řádky, posloupnosti jejích řádků délky větší než m i nekonečné posloupnosti jejích řádků jsou lineárně závislé. Proto hodnost matice s m řádky je jedno z čísel $0, 1, \dots, m$.

Příklad. (1) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je rovna 3. Ověřte.

(2) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je rovna 2. Ověřte.

(3) Hodnost nulové matice je rovna 0, hodnost nenulové matice je kladná.

(4) Hodnost diagonální matice je rovna počtu jejích nenulových řádků. □

Cvičení. Spočtěte hodnosti matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ □

Tvrzení 1.5.2. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Důkaz. Buď A matice ve schodovitém tvaru, která má m řádků, z nichž p je nenulových. Každá posloupnost řádků, ve které je každý z p nenulových řádků právě jednou, má délku p a je lineárně nezávislá (cvičení), takže $\operatorname{rank} A \geq p$. Každá posloupnost řádků délky větší než p obsahuje buď aspoň jeden nulový řádek nebo nějaký nenulový řádek vícekrát, a je tedy lineárně závislá, takže $\operatorname{rank} A \leq p$. Tedy, $\operatorname{rank} A = p$. □

Podle následujícího tvrzení je posloupnost řádků lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá posloupnost řádků vzniklá provedením řádkové nebo sloupkové elementární úpravy původní posloupnosti řádků.

Tvrzení 1.5.3. *Buďte $A^1_\circ, A^2_\circ, \ldots, A^m_\circ$ řádky. Nechť $B^1_\circ, B^2_\circ, \ldots, B^m_\circ$ jsou řádky, které z řádků $A^1_\circ, A^2_\circ, \ldots, A^m_\circ$ vzniknou provedením jedné řádkové nebo sloupkové elementární úpravy. Potom posloupnost řádků $(A^1_\circ, A^2_\circ, \ldots, A^m_\circ)$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když posloupnost řádků $(B^1_\circ, B^2_\circ, \ldots, B^m_\circ)$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. (1) Nechť došlo k přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, kde $i \neq j$. Tedy, $B^i_\circ = A^i_\circ + cA^j_\circ$ a $B^k_\circ = A^k_\circ$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $(A^1_\circ, A^2_\circ, \ldots, A^m_\circ)$ je lineárně nezávislá. Buďte $c_1, \ldots, c_m \in P$ takové, že $c_1B^1_\circ + \cdots + c_mB^m_\circ = 0_\circ$. Pak

$$\begin{aligned} 0_\circ &= c_1B^1_\circ + \cdots + c_mB^m_\circ = \\ &= c_1A^1_\circ + \cdots + c_i(A^i_\circ + cA^j_\circ) + \cdots + c_jA^j_\circ + \ldots + c_mA^m_\circ = \\ &= c_1A^1_\circ + \cdots + c_iA^i_\circ + \cdots + (c_j + cc_i)A^j_\circ + \ldots + c_mA^m_\circ. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti posloupnosti $(A^1_\circ, A^2_\circ, \ldots, A^m_\circ)$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $c_1 = \cdots = c_i = \cdots = cc_i + c_j = \cdots = c_m = 0$. Z toho dostaneme, že i $c_j = 0$, a posloupnost $(B^1_\circ, B^2_\circ, \ldots, B^m_\circ)$ je lineárně nezávislá.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \ldots, A^m_\circ$ vzniknou z řádků $B^1_\circ, B^2_\circ, \ldots, B^m_\circ$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

(2) Nechť došlo k přičtení c-násobku j-tého sloupku k i-tému sloupku, kde $i \neq j$. Pak pro každé $k \in \{1, \ldots, m\}$ je $B^k_i = A^k_i + cA^k_j$ a $B^k_l = A^k_l$ pro $l \neq i$. Tedy $B^k_\circ = \begin{pmatrix} A^k_1 & \ldots & A^k_i + cA^k_j & \ldots & A^k_j & \ldots & A^k_n \end{pmatrix}$.

Předpokládejme, že $(A^1_\circ, A^2_\circ, \ldots, A^m_\circ)$ je lineárně nezávislá. Buďte $c_1, \ldots, c_m \in P$ takové, že $c_1B^1_\circ + \cdots + c_mB^m_\circ = 0_\circ$. Takže

$$\begin{aligned} &c_1B^1_\circ + \cdots + c_mB^m_\circ = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_k c_kA^k_1 & \ldots & \sum_k c_k(A^k_i + cA^k_j) & \ldots & \sum_k c_kA^k_j & \ldots & \sum_k c_kA^k_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_k c_kA^k_1 & \ldots & \sum_k c_kA^k_i + c\sum_k c_kA^k_j & \ldots & \sum_k c_kA^k_j & \ldots & \sum_k c_kA^k_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a z toho dostaneme

$$\sum_k c_kA^k_1 = \cdots = \sum_k c_kA^k_i = \cdots = \sum_k c_kA^k_j = \cdots = \sum_k c_kA^k_n = 0.$$

Pak

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sum_k c_kA^k_1 & \sum_k c_kA^k_2 & \ldots & \sum_k c_kA^k_n \end{pmatrix} = \sum_k c_k \begin{pmatrix} A^k_1 & A^k_2 & \ldots & A^k_n \end{pmatrix} = \\ &= \sum_k c_kA^k_\circ = c_1A^1_\circ + \cdots + c_mA^m_\circ = 0_\circ \end{aligned}$$

a z lineární nezávislosti posloupnosti $(A^1_\circ, A^2_\circ, \ldots, A^m_\circ)$ dostaneme $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. Posloupnost $(B^1_\circ, B^2_\circ, \ldots, B^m_\circ)$ je tedy lineárně nezávislá.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vzniknou z řádků $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy je důkaz obdobný a ponecháme ho jako cvičení. □

Důsledek. *(1) Hodnost matice je rovna hodnosti matice z ní vzniklé provedením elementární úpravy.*

(2) Provedení konečně mnoha elementárních úprav nemění hodnost.

(3) Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zleva nemění hodnost.

(4) Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zprava nemění hodnost.

(5) Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

(6) Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru.

(7) Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků (sloupků) ekvivalentní matice v Gaussově kanonickém tvaru.

(8) Maximální počet členů lineárně nezávislých posloupností sloupků matice je roven maximálnímu počtu členů lineárně nezávislých posloupností jejích řádků, tj. hodnosti matice.

(9) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^\intercal$.

Příklad. Spočítejme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takže $\operatorname{rank} A = 3$. □

Příklad. Spočítejme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takže $\operatorname{rank} A = 2$. □

Definice 1.5.4. *Regulární* matice je čtvercová matice, jejíž hodnost je rovna počtu jejích řádků. *Singulární* matice je čtvercová matice, která není regulární.

Čtvercová matice typu $m \times m$ je tedy regulární, jestliže aspoň jedna (a v takovém případě pak všechny) posloupnost délky m všech jejích řádků je lineárně nezávislá.

Příklad. (1) Všechny jednotkové matice jsou regulární.

(2) Všechny elementární matice jsou regulární.

(3) Všechny čtvercové matice s aspoň jedním nulovým řádkem jsou singulární. □

Tvrzení 1.5.4. *Matice je regulární právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. *(1) Matice je invertibilní právě tehdy, když je regulární.*

(2) Regulární matice je součinem konečně mnoha elementárních matic.

(3) Součin regulárních matic je regulární matice.

(4) Vynásobení regulární maticí zleva nemění hodnost.

(5) Vynásobení regulární maticí zprava nemění hodnost.

Tvrzení 1.5.5. *Buďte A, B čtvercové matice stejného typu. Obě matice A, B jsou regulární právě tehdy, když matice AB je regulární.*

Důkaz. „⇒“ Tato implikace je součástí předchozího Důsledku.

„⇐“ Dokážeme, že je-li aspoň jedna z matic A, B singulární, pak AB je singulární. Nechť A je singulární. Ekvivalentní matice $S = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1, \ldots, Q_k$ jsou elementární matice, ve schodovitém tvaru, má nulový řádek. Potom matice SB má také nulový řádek, je tedy singulární a řádkově ekvivalentní matice $AB = Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} SB$, která má stejnou hodnost, je také singulární.

Pro B singulární je důkaz analogický a ponecháme ho jako cvičení. □

Tvrzení 1.5.6. *Buďte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$. Potom* $\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

Důkaz. Matici A převedeme pomocí řádkových elementárních úprav na schodovitý tvar $S_A = Q_k \cdots Q_1 A$ a matici B převedeme pomocí sloupkových elementárních úprav na tvar $S_B = B P_1 \cdots P_l$ takový, že S_B^{T} je ve schodovitém tvaru.

Potom $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} S_A S_B P_l^{-1} \cdots P_1^{-1} = \operatorname{rank} S_A S_B$, přičemž matice $S_A S_B$ má minimálně tolik nulových řádků, kolik jich má matice S_A, a minimálně tolik nulových sloupků, kolik jich má matice S_B. Tedy $\operatorname{rank} S_A S_B \leq \operatorname{rank} S_A = \operatorname{rank} A$ a $\operatorname{rank} S_A S_B \leq \operatorname{rank} S_B = \operatorname{rank} B$. □

Cvičení. Co se dá říct o $\operatorname{rank}(A + B)$? □

2. Determinant

2.1. Permutace

Definice 2.1.1. Buď M konečná množina. *Permutace* na množině M je bijekce $M \to M$.

Buď σ permutace na množině M a $m \in M$. Obraz $\sigma(m)$ prvku m při permutaci σ se často značí σ_m.

Definice 2.1.2. *Transpozice* je permutace, při níž se vzájemně vymění dva prvky a ostatní se nezmění.

Tvrzení 2.1.1. *Každá permutace je složením konečně mnoha transpozic.*

Nechť $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Množinu všech permutací na množině I_n značíme S_n. Permutaci $\sigma \in S_n$ můžeme zapisovat jako uspořádanou n-tici obrazů prvků množiny I_n, tedy $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

Definice 2.1.3. Buď $\sigma \in S_n$. Nechť $i, j \in I_n$ jsou takové, že $i < j$ a $\sigma_i > \sigma_j$. Pak dvojice (σ_i, σ_j) tvoří *inverzi* permutace σ.

Počet inverzí permutace σ značíme $\operatorname{inv}\sigma$. Je zřejmé, že $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}\sigma^{-1}$.

Definice 2.1.4. *Signum (znaménko)* permutace $\sigma \in S_n$ je $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{\operatorname{inv}\sigma}$. Permutace s $\operatorname{sgn}\sigma = 1$ je *sudá*, permutace s $\operatorname{sgn}\sigma = -1$ je *lichá*.

Jelikož $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}\sigma^{-1}$, $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

Tvrzení 2.1.2. *Buďte $\rho, \sigma \in S_n$. Pak $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn}\pi \cdot \operatorname{sgn}\rho$.*

Cvičení. Ukažte, že každá transpozice je lichá permutace. □

Více o permutacích lze najít například v [Marvan, 4. Permutace].

2.2. Determinant

2.2.1. Definice a determinanty některých matic

Definice 2.2.1. Buď A matice typu $n \times n$ nad polem P. *Determinant* matice A je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n} \in P.$$

Číslo n je *řád* determinantu.

Pro determinant matice A se používá značení

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \ldots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \ldots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \ldots & A^n_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \ldots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \ldots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \ldots & A^n_n \end{vmatrix}.$$

Díky tomu, že σ je permutace (bijektivní zobrazení) na množině I_n, můžeme ji chápat jako zobrazení z množiny všech řádkových indexů do množiny všech sloupkových indexů

matice A. Ke každému řádku je tedy vzájemně jednoznačně přiřazen sloupek a v každém součinu $A^1_{\sigma_1} \cdot A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n}$ je tedy právě jeden prvek z každého řádku a právě jeden prvek z každého sloupku. Determinant matice A je tedy součet všech takovýchto součinů (pro všechny permutace σ na množině I_n) opatřených buď znaménkem $+$, jde-li o sudou permutaci, nebo znaménkem $-$, jde-li o lichou permutaci.

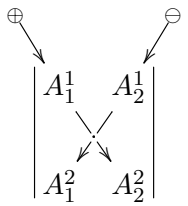
Je-li $A = (A^i_j)$ čtvercová matice typu $n \times n$ nad polem P, potom $|\det A|$ je objem n-rozměrného rovnoběžnostěnu v P^n určeného vrcholy

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A^1_1 \\ A^2_1 \\ \vdots \\ A^n_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A^1_2 \\ A^2_2 \\ \vdots \\ A^n_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} A^1_n \\ A^2_n \\ \vdots \\ A^n_n \end{pmatrix}.$$

Příklad. (1) Nechť $n = 1$. Tedy, $I_1 = \{1\}$, $S_1 = \{\mathrm{id}\colon \{1\} \to \{1\}\}$ a $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = 1$. Pro matici $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ je $\det A = \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot A^1_{\mathrm{id}_1} = 1 \cdot A^1_1 = a$.
(2) Nechť $n = 2$. Tedy, $I_2 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$, kde $\mathrm{id} = (1, 2)$ a $\tau = (2, 1)$ (viz zápis permutace na I_n), $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = 1$ a $\operatorname{sgn} \tau = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je $\det A = \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot A^1_{\mathrm{id}_1} A^2_{\mathrm{id}_2} + \operatorname{sgn} \tau \cdot A^1_{\tau_1} A^2_{\tau_2} = 1 \cdot A^1_1 A^2_2 + (-1) \cdot A^1_2 A^2_1 = ad - bc$. Vzorec pro výpočet determinantu matice druhého řádu je možno odvodit z následujícího obrázku:



$$= A^1_1 A^2_2 - A^1_2 A^2_1$$

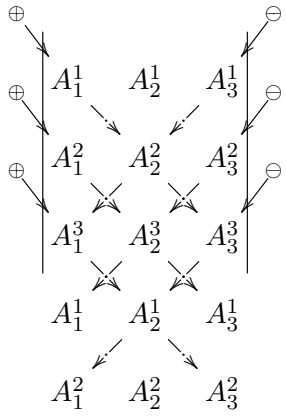
(3) Nechť $n = 3$. Tedy, $I_3 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, kde $\mathrm{id} = (1, 2, 3)$, $\sigma_1 = (2, 3, 1)$, $\sigma_2 = (3, 1, 2)$, $\tau_1 = (1, 3, 2)$, $\tau_2 = (3, 2, 1)$, $\tau_3 = (2, 1, 3)$ (viz zápis permutace na I_n), $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = \operatorname{sgn} \sigma_1 = \operatorname{sgn} \sigma_2 = 1$ a $\operatorname{sgn} \tau_1 = \operatorname{sgn} \tau_2 = \operatorname{sgn} \tau_3 = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

je

$$\begin{aligned} \det A = {} & \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot A^1_{\mathrm{id}_1} A^2_{\mathrm{id}_2} A^3_{\mathrm{id}_3} + \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot A^1_{\sigma_1(1)} A^2_{\sigma_1(2)} A^3_{\sigma_1(3)} + \\ & + \operatorname{sgn} \sigma_2 \cdot A^1_{\sigma_2(1)} A^2_{\sigma_2(2)} A^3_{\sigma_2(3)} + \operatorname{sgn} \tau_1 \cdot A^1_{\tau_1(1)} A^2_{\tau_1(2)} A^3_{\tau_1(3)} + \\ & + \operatorname{sgn} \tau_2 \cdot A^1_{\tau_2(1)} A^2_{\tau_2(2)} A^3_{\tau_2(3)} + \operatorname{sgn} \tau_3 \cdot A^1_{\tau_3(1)} A^2_{\tau_3(2)} A^3_{\tau_3(3)} = \\ = {} & 1 \cdot A^1_1 A^2_2 A^3_3 + 1 \cdot A^1_2 A^2_3 A^3_1 + 1 \cdot A^1_3 A^2_1 A^3_2 + \\ & + (-1) \cdot A^1_1 A^2_3 A^3_2 + (-1) \cdot A^1_3 A^2_2 A^3_1 + (-1) \cdot A^1_2 A^2_1 A^3_3 = \\ = {} & aei + bfg + cdh - afh - ceg - bdi. \end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet determinantu matice třetího řádu lze odvodit z následujího obrázku pomocí *Sarrusova pravidla* (pro matice vyššího řádu žádné takové pravidlo neexistuje):



$$= \quad A_1^1A_2^2A_3^3 + A_2^1A_3^2A_1^3 + A_3^1A_1^2A_2^3 -$$
$$-A_1^1A_3^2A_2^3 - A_3^1A_2^2A_1^3 - A_2^1A_1^2A_3^3$$

(4) Nechť $n = 4$. Na čtyřprvkové množině existují 24 permutace, takže při výpočtu determinantu podle definice dostaneme 24 sčítance. Uvedeme si i jiné způsoby výpočtu determinantu. □

Cvičení. Spočtěte determinanty matic

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&6\\2&4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\\5&6&7\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&4&6\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3&4&5\\1&2&3\\5&6&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\3&4&5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&3\\1&0&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&2\\0&0&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&5\\7&8&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&0\\0&5&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&-4&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&0\\4&5&6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\4&5&6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\4&5&6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\4&5&6\end{pmatrix}$$

□

Tvrzení 2.2.1. *Determinant matice s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem je roven nule.*

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$ s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem. Pro každé $\sigma \in S_n$ je v součinu $A^1_{\sigma_1} A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n}$ právě jeden prvek z každého, tedy i nulového řádku a právě jeden prvek z každého, tedy i nulového sloupku. Proto každý takový součin je roven nule. □

Lemma 2.2.2. *Pro matice lišící se pouze v jednom řádku platí*

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^{i-1}_1 & \dots & A^{i-1}_n \\ A^i_1 & \dots & A^i_n \\ A^{i+1}_1 & \dots & A^{i+1}_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^{i-1}_1 & \dots & A^{i-1}_n \\ B^i_1 & \dots & B^i_n \\ A^{i+1}_1 & \dots & A^{i+1}_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^{i-1}_1 & \dots & A^{i-1}_n \\ A^i_1 + B^i_1 & \dots & A^i_n + B^i_n \\ A^{i+1}_1 & \dots & A^{i+1}_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_n \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Cvičení. □

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 + (-6) + 3 = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$ □

Definice 2.2.2. Čtvercová matice je (*horní* resp. *dolní*) *trojúhelníková* (nebo v (*horním* resp. *dolním*) *trojúhelníkovém tvaru*), jestliže pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A^i_j = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$.

Každá čtvercová matice ve schodovitém tvaru je také v (horním) trojúhelníkovém tvaru a tedy každou čtvercovou matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na trojúhelníkový tvar.

Tvrzení 2.2.3. *Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.*

Důkaz. Buď A horní trojúhelníková matice typu $n \times n$. Buď σ permutace na množině I_n. Jestliže pro nějaké $i \in I_n$ platí $\sigma_i < i$, pak $A^i_{\sigma_i}$ je pod diagonálou, tedy $A^i_{\sigma_i} = 0$ a také $\operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_i} \cdots A^n_{\sigma_n} = 0$. Jediná permutace σ taková, že $\sigma_i \geq i$ pro každé i, je identita. Jelikož $\operatorname{sgn}\mathrm{id} = 1$, $\det A = A^1_1 A^2_2 \cdots A^n_n$.

Pro dolní trojúhelníkové matice je důkaz analogický. □

Důsledek. *(1) Determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na diagonále.*

(2) Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na diagonále.

(3) Determinant jednotkové matice je roven 1.

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24.$$ □

Determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Příklad. (1) $E^{i,j}(c)$ je trojúhelníková matice a na diagonále má jen jedničky, proto $\det E^{i,j}(c) = 1$.

(2) $E^i(c)$ je diagonální matice a na diagonále má jedno c a jinak jen jedničky, proto $\det E^i(c) = c$.

(3) Jelikož v každém řádku a v každém sloupku matice $E^{i,j}$ je právě jedna jednička a ostatní prvky jsou nuly, existuje jediná permutace τ na I_n, pro kterou jsou všechny $(E^{i,j})^1_{\tau_1}, \dots, (E^{i,j})^n_{\tau_n}$ rovny jedné. Pro ostatní permutace je aspoň jeden z těchto prvků nulový. Díky tvaru $E^{i,j}$ je τ transpozice, takže $\operatorname{sgn}\tau = -1$. Proto

$$\det E^{i,j} = (-1)\cdot (E^{i,j})^1_{\tau_1} \cdots (E^{i,j})^n_{\tau_n} = -1. \qquad \square$$

Tvrzení 2.2.4. *Pro každou čtvercovou matici A platí* $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$.

Důkaz. Činitele v součinu $A^{\sigma_1}_1 \dots A^{\sigma_i}_i \dots A^{\sigma_n}_n$ můžeme uspořádat podle vzrůstajícího řádkového indexu $A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}}$, protože σ_i^{-1}-tý činitel v původním součinu je $A^{\sigma_{\sigma_i^{-1}}}_{\sigma_i^{-1}} = A^i_{\sigma_i^{-1}}$. Potom

$$\begin{aligned}
\det A^{\mathsf{T}} &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot (A^{\mathsf{T}})^1_{\sigma_1} \dots (A^{\mathsf{T}})^i_{\sigma_i} \dots (A^{\mathsf{T}})^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^{\sigma_1}_1 \dots A^{\sigma_i}_i \dots A^{\sigma_n}_n = && \text{(přeuspořádání)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}} = && (\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} \cdot A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}} = \\
&= \det A,
\end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n, tak σ^{-1} také. $\square$

Tvrzení 2.2.5. *Determinant matice, která má buď dva řádky stejné nebo dva sloupky stejné, je roven nule.*

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$, která má i-tý řádek stejný jako j-tý ($i \neq j$), tedy $A^i_k = A^j_k$ pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Buď $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j, čili $\operatorname{sgn}\tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\operatorname{sgn}\sigma' = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau_{ij} = -\operatorname{sgn}\sigma$ a člen determinantu odpovídající permutaci σ' je

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}\sigma' \cdot A^1_{\sigma'_1} \cdots A^i_{\sigma'_i} \cdots A^j_{\sigma'_j} \cdots A^n_{\sigma'_n} = \\
&\quad = -\operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_j} \cdots A^j_{\sigma_i} \cdots A^n_{\sigma_n} = && (A^i_{\sigma_j} = A^j_{\sigma_j} \text{ a } A^j_{\sigma_i} = A^i_{\sigma_i}) \\
&\quad = -\operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_i} \cdots A^j_{\sigma_j} \cdots A^n_{\sigma_n},
\end{aligned}$$

a je tedy opačný k členu odpovídajícímu permutaci σ.

Množinu S_n, jež má sudý počet prvků, můžeme rozložit na podmnožiny $\{\sigma, \sigma'\}$, které jsou dvouprvkové, protože $\sigma' \neq \sigma$ a $\sigma'' = \sigma$ (ověřte), a každá z nich přispívá k determinantu nulou. Takže $\det A = 0$.

Když má matice dva stejné sloupky, lze tvrzení dokázat analogicky nebo je možno použít předchozí tvrzení. $\square$

2.2.2. Elementární úpravy

Tvrzení 2.2.6. *(1) Přičtením násobku jednoho řádku, resp. sloupku k jinému řádku, resp. sloupku se determinant nezmění, čili*

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i + cA_1^j & A_2^i + cA_2^j & \dots & A_n^i + cA_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix},$$

při zápisu s použitím elementárních matic

$$\det(E^{i,j}(c) \cdot A) = \det(A \cdot E^{i,j}(c)) = \det A.$$

(2) Vynásobením jednoho řádku, nebo sloupku prvkem c se determinant vynásobí prvkem c, čili

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cA_1^i & cA_2^i & \dots & cA_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix},$$

při zápisu s použitím elementárních matic

$$\det(E^i(c) \cdot A) = \det(A \cdot E^i(c)) = c \det A.$$

(3) Vzájemnou výměnou dvou řádků, nebo dvou sloupků determinant změní znaménko, čili

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix},$$

při zápisu s použitím elementárních matic

$$\det(E^{i,j} \cdot A) = \det(A \cdot E^{i,j}) = -\det A.$$

Důkaz. Uvedeme pouze důkaz pro řádkové úpravy, pro sloupkové je analogický.

Buďte A čtvercová matice a B upravená matice.

(1) Nechť B vznikne z A přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, čili $B^i_\circ = A^i_\circ + cA^j_\circ$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A. Potom

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot B^1_{\sigma_1} \dots B^i_{\sigma_i} \dots B^j_{\sigma_j} \dots B^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots (A^i_{\sigma_i} + cA^j_{\sigma_i}) \dots A^j_{\sigma_j} \dots A^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots A^i_{\sigma_i} \dots A^j_{\sigma_j} \dots A^n_{\sigma_n} + \\
&\quad + c \underbrace{\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots A^j_{\sigma_i} \dots A^j_{\sigma_j} \dots A^n_{\sigma_n}}_{\text{determinant matice, kde } i\text{-tý řádek je stejný jako } j\text{-tý}} = \\
&= \det A + c \cdot 0 = \det A.
\end{aligned}$$

(2) Nechť B vznikne z A vynásobením i-tého řádku prvkem c, čili $B^i_\circ = cA^i_\circ$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A. Potom

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot B^1_{\sigma_1} \dots B^i_{\sigma_i} \dots B^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots cA^i_{\sigma_i} \dots A^n_{\sigma_n} = \\
&= c \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots A^i_{\sigma_i} \dots A^n_{\sigma_n} = \\
&= c \det A.
\end{aligned}$$

(3) Nechť B vznikne z A vzájemnou výměnou i-tého řádku a j-tého řádku, čili $B^i_\circ = A^j_\circ$, $B^j_\circ = A^i_\circ$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A. Buď $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j, čili $\operatorname{sgn}\tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma\circ\tau_{ij}$. Pak $\sigma'_i = \sigma_j$, $\sigma'_j = \sigma_i$ a $\sigma'_k = \sigma_k$ pro $k \neq i, j$ a $\operatorname{sgn}\sigma' = \operatorname{sgn}\sigma\cdot\operatorname{sgn}\tau_{ij} = -\operatorname{sgn}\sigma$. Potom

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot B^1_{\sigma_1} \dots B^i_{\sigma_i} \dots B^j_{\sigma_j} \dots B^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots A^j_{\sigma_i} \dots A^i_{\sigma_j} \dots A^n_{\sigma_n} = && \text{(komutativita součinu)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots A^i_{\sigma_j} \dots A^j_{\sigma_i} \dots A^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma'_1} \dots A^i_{\sigma'_i} \dots A^j_{\sigma'_j} \dots A^n_{\sigma'_n} = && (\operatorname{sgn}\sigma' = -\operatorname{sgn}\sigma) \\
&= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot A^1_{\sigma'_1} \dots A^i_{\sigma'_i} \dots A^j_{\sigma'_j} \dots A^n_{\sigma'_n} = \\
&= -\det A,
\end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n, tak σ' také. □

Cvičení. Jaký je vztah mezi $\det(cA)$ a $\det A$? □

Cvičení. Buď A antisymetrická matice typu $n \times n$. Ukažte, že je-li n liché číslo, pak $\det A = 0$. □

Příklad.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\4&4&4&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\3&3&6&6\\4&4&4&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&4&4&4\\3&3&6&6\\4&4&4&8\end{vmatrix}$$

$$4\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4&4&4&4\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&8&8&8\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&12&12\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&16\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix}0&0&0&4\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\1&1&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&0&4\\0&0&3&3\\0&2&2&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

□

Důsledek. *Buďte Q elementární matice a A matice stejného typu. Pak*

$$\det QA = \det Q \cdot \det A.$$

Důkaz. (1) $\det(E^{i,j}(c)A) = \det A = 1 \cdot \det A = \det E^{i,j}(c) \cdot \det A$.
(2) $\det(E^{i}(c)A) = c \det A = \det E^{i}(c) \cdot \det A$.
(3) $\det(E^{i,j}A) = (-1) \cdot \det A = \det E^{i,j} \cdot \det A$. □

Cvičení. Dokažte, že $\det E^{i,j} = -1$ s využitím předchozího důsledku a toho, že vzájemná výměna dvou řádků je složením konečně mnoha řádkových elementárních úprav ostatních druhů. □