

2. přednáška, 29. 9. 2026

1.2.2. Součin

Definice 1.2.4. Buďte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$ nad polem P . *Součin* matic A, B (v tomto pořadí) je matice $A \cdot B$ (obvykle označovaná jen AB) typu $m \times p$ nad polem P taková, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, p\}$

$$(AB)_j^i = A_1^i B_j^1 + A_2^i B_j^2 + \dots + A_n^i B_j^n = \sum_{k=1}^n A_k^i B_j^k.$$

Matice B má tedy tolik řádků, kolik má matice A sloupců. Prvek matice AB v i -tém řádku a j -tém sloupcu získáme tedy tak, že sečteme součiny prvků v i -tém řádku matice A s odpovídajícími prvky v j -tém sloupcu matice B . Tedy

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_1^1 B_1^1 + A_2^1 B_1^2 + \dots + A_n^1 B_1^n & \dots & A_1^1 B_p^1 + A_2^1 B_p^2 + \dots + A_n^1 B_p^n \\ A_1^2 B_1^1 + A_2^2 B_1^2 + \dots + A_n^2 B_1^n & \dots & A_1^2 B_p^1 + A_2^2 B_p^2 + \dots + A_n^2 B_p^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^m B_1^1 + A_2^m B_1^2 + \dots + A_n^m B_1^n & \dots & A_1^m B_p^1 + A_2^m B_p^2 + \dots + A_n^m B_p^n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1^1 B_o^1 + A_2^1 B_o^2 + \dots + A_n^1 B_o^n \\ A_1^2 B_o^1 + A_2^2 B_o^2 + \dots + A_n^2 B_o^n \\ \vdots \\ A_1^m B_o^1 + A_2^m B_o^2 + \dots + A_n^m B_o^n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_o^1 B \\ A_o^2 B \\ \vdots \\ A_o^m B \end{pmatrix} = \\ &= (B_1^1 A_o^1 + B_1^2 A_o^2 + \dots + B_1^n A_o^n \quad \dots \quad B_p^1 A_o^1 + B_p^2 A_o^2 + \dots + B_p^n A_o^n) = \\ &= (AB_1^o \quad AB_2^o \quad \dots \quad AB_p^o). \end{aligned}$$

Čili, první řádek matice AB získáme tak, že vezmeme A_1^1 -násobek řádku B_o^1 , A_2^1 -násobek řádku B_o^2 , ..., A_n^1 -násobek řádku B_o^n a všechny tyto násobky sečteme. Je to tedy lineární kombinace řádků matice B s koeficienty z prvního řádku matice A , jinými slovy, součin prvního řádku matice A , řádek je matice typu $1 \times n$, a matice B .

Obdobně získáme ostatní řádky matice AB . Obecně, i -tý řádek matice AB získáme tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ prvkem A_k^i vynásobíme k -tý řádek matice B a všechny tyto násobky sečteme. Takže i -tý řádek matice AB je lineární kombinace řádků matice B s koeficienty z i -tého řádku matice A , jinými slovy, součin i -tého řádku matice A , řádek je matice typu $1 \times n$, a matice B .

Analogicky, první sloupec matice AB získáme tak, že vezmeme B_1^1 -násobek sloupku A_o^1 , B_1^2 -násobek sloupku A_o^2 , ..., B_1^n -násobek sloupku A_o^n a všechny tyto násobky sečteme. Je to tedy lineární kombinace sloupců matice A s koeficienty z prvního sloupku matice B , jinými slovy, součin matice A a prvního sloupku matice B , sloupec je matice typu $n \times 1$.

Obdobně získáme ostatní sloupky matice AB . Obecně, j -tý sloupec matice AB získáme tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ prvkem B_j^k vynásobíme k -tý sloupec matice A a všechny tyto násobky sečteme. Takže j -tý sloupec matice AB je lineární kombinace

sloupků matice A s koeficienty z j -tého sloupku matice B , jinými slovy, součin matice A a j -tého sloupku matice B , sloupek je matice typu $n \times 1$.

Nejsou-li typy matic v uvedeném vztahu (druhá má tolik řádků, kolik má první sloupků), nelze je (v daném pořadí) násobit, příslušný součin neexistuje.

Příklad. (1) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1 & 0) + 2 \cdot (1 & 2) \\ 3 \cdot (-1 & 0) + 4 \cdot (1 & 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1 & 0) + (2 & 4) \\ (-3 & 0) + (4 & 8) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1 & 2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ (3 & 4) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \cdot (1 & 2) + 0 \cdot (3 & 4) \\ 1 \cdot (1 & 2) + 2 \cdot (3 & 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1 & -2) + (0 & 0) \\ (1 & 2) + (6 & 8) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1 & 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ (1 & 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$AB = (1 \cdot 0 + 2 \cdot 3) = (6),$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je } AB = (2 \ 1), BA \text{ neexistuje.}$$

□

Předcházející příklady ukazují, že součin matic není komutativní, tedy nemusí platit $AB = BA$.

Cvičení. Spočtěte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Tvrzení 1.2.2. (1) Je-li i -tý řádek matice A nulový, pak i -tý řádek matice AB je nulový.

(2) Je-li j -tý sloupek matice B nulový, pak j -tý sloupek matice AB je nulový.

(3) Součin diagonálních matic je diagonální matice.

(4) Součin blokově diagonálních matic s bloky stejných typů je blokově diagonální matice s bloky stejných typů.

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodu (4), ostatní ponecháme jako cvičení.

(4) Buďte A, B blokově diagonální matice s bloky $A_1, \dots, A_p$, resp. $B_1, \dots, B_p$ takovými, že pro každé i A_i, B_i jsou stejného typu. A, B jsou tedy čtvercové matice stejného typu a je možné je vzájemně násobit.

i -tý řádek matice A je

$$A_{\circ}^i = (0 \quad \dots \quad 0 \quad A_{i_1}^i \quad \dots \quad A_{i_m}^i \quad 0 \quad \dots \quad 0),$$

čili $A_j^i = 0$ pro $j < i_1$ a $j > i_m$.
 j -tý sloupek matice B je

$$B_j^\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_j^{j_1} \\ \vdots \\ B_j^{j_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

čili $B_j^i = 0$ pro $i < j_1$ a $i > j_n$.

Jsou-li i, j taková, že pozice v i -tém řádku a j -tém sloupku je mimo bloky $A_1, \dots, A_p$, resp. $B_1, \dots, B_p$, pak buď $i_1 > j_n$ nebo $i_m < j_1$. V obou případech pro každé k buď $A_k^i = 0$ nebo $B_j^k = 0$. Jelikož $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ pro každé x z příslušného pole, viz kapitola 6, v obou případech pro každé k platí $A_k^i B_j^k = 0$, tedy i

$$(AB)_j^i = \sum_k A_k^i B_j^k = 0,$$

takže AB je blokově diagonální matice s bloky stejných typů, jakých jsou bloky v maticích A a B . □

Tvrzení 1.2.3. *Nechť A, B, C jsou matice nad polem P takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a $c \in P$. Pak platí*

$$(1) \quad A(BC) = (AB)C,$$

$$(2) \quad AE = EA = A,$$

$$(3) \quad A(B + C) = AB + AC,$$

$$(4) \quad (A + B)C = AC + BC,$$

$$(5) \quad c(AB) = (cA)B = A(cB).$$

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodů (1) a (3), ostatní ponecháme jako cvičení.

(1) Předpokládejme, že A je matice typu $m \times n$, B je matice typu $n \times p$ a C je matice typu $p \times q$. Potom AB je matice typu $m \times p$ a BC je matice typu $n \times q$, takže $A(BC)$ a $(AB)C$ jsou matice typu $m \times q$.

$$\begin{aligned}
(A(BC))_j^i &= && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i (BC)_j^k = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i \sum_{l=1}^p (B_l^k C_j^l) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p A_k^i (B_l^k C_j^l) = && \text{(díky asociativitě součinu v poli)} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (A_k^i B_l^k) C_j^l = && \text{(díky komutativitě součtu v poli)} \\
&= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (A_k^i B_l^k) C_j^l = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{l=1}^p (AB)_l^i C_j^l = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= ((AB)C)_j^i.
\end{aligned}$$

(3) Předpokládejme, že A je matice typu $m \times n$ a B, C jsou matice typu $n \times p$. Potom $A(B + C)$ a $AB + AC$ jsou matice typu $m \times p$ a pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ platí

$$\begin{aligned}
(A(B + C))_j^i &= && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i (B + C)_j^k = && \text{(podle definice součtu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i (B_j^k + C_j^k) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\
&= \sum_{k=1}^n (A_k^i B_j^k + A_k^i C_j^k) = && \text{(díky komutativitě sčítání v poli)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i B_j^k + \sum_{k=1}^n A_k^i C_j^k = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= (AB)_j^i + (AC)_j^i = && \text{(podle definice součtu matic)} \\
&= (AB + AC)_j^i.
\end{aligned}$$

□

1.2.3. Transponování

Definice 1.2.5. *Transponovaná* matice k matici A typu $m \times n$ je matice A^T typu $n \times m$, kde $(A^T)_j^i = A_i^j$ pro všechna i, j .

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

□

Tvrzení 1.2.4. *Nechť A, B jsou matice nad polem P takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a $c \in P$. Pak platí*

$$\begin{aligned} (1) \quad A &= (A^T)^T, & (3) \quad (cA)^T &= cA^T, \\ (2) \quad (A+B)^T &= A^T + B^T, & (4) \quad (AB)^T &= B^T A^T. \end{aligned}$$

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodů (1) a (4), ostatní ponecháme jako cvičení.

(1) Je-li A typu $m \times n$, potom A^T je typu $n \times m$ a $(A^T)^T$ je typu $m \times n$. Navíc pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$((A^T)^T)_j^i = (A^T)_i^j = A_j^i.$$

(4) Buďte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$. Pak A^T je typu $n \times m$, B^T je typu $p \times n$, AB je typu $m \times p$ a tedy $(AB)^T$ i $B^T A^T$ jsou typu $p \times m$. Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí

$$\begin{aligned} ((AB)^T)_j^i &= (AB)_i^j = \sum_{k=1}^n A_k^j B_i^k = \sum_{k=1}^n B_i^k A_k^j = \sum_{k=1}^n (B^T)_k^i (A^T)_j^k = \\ &= (B^T A^T)_j^i. \end{aligned}$$

□

Cvičení. Ukažte, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a libovolné matice $A_1, \dots, A_k$ vhodných typů platí $(A_1 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_1^T$. □

Definice 1.2.6. Čtvercová matice A typu $n \times n$ je

- *symetrická*, je-li $A_j^i = A_i^j$ pro libovolné $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tedy $A^T = A$,
- *antisymetrická*, je-li $A_j^i = -A_i^j$ pro libovolné $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tedy $A^T = -A$.

Příklad. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ je symetrická matice.}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je antisymetrická matice.}$$

(3) Nulová čtvercová matice je symetrická i antisymetrická. □

Charakteristika pole je buď nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-krát}} = 0,$$

nebo 0, pokud takové přirozené číslo pro dané pole neexistuje (více v kapitole 6).

Tvrzení 1.2.5. (1) *Součet symetrických matic je symetrická matice.*

(2) *c -násobek symetrické matice je symetrická matice.*

(3) *Součet antisymetrických matic je antisymetrická matice.*

- (4) c -násobek antisymetrické matice je antisymetrická matice.
 (5) Je-li A libovolná čtvercová matice, pak $A + A^T$ je symetrická matice a $A - A^T$ je antisymetrická matice.
 (6) Libovolnou čtvercovou matici nad polem charakteristiky různé od 2 lze zapsat jednoznačně jako součet symetrické matice a antisymetrické matice.

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodu (6), ostatní ponecháme jako cvičení.

(6) Buď A čtvercová matice nad polem charakteristiky různé od 2. Potom $\frac{1}{2}(A + A^T)$ je symetrická matice, $\frac{1}{2}(A - A^T)$ je antisymetrická matice a $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

Buďte B symetrická matice a C antisymetrická matice takové, že $A = B + C$. Takže,

$$\begin{aligned} A_j^i &= B_j^i + C_j^i \\ A_i^j &= B_i^j + C_i^j = B_j^i - C_j^i. \end{aligned}$$

Součtem těchto dvou rovnic dostaneme

$$A_j^i + A_i^j = 2 \cdot B_j^i, \quad \text{čili} \quad B_j^i = \frac{1}{2}(A_j^i + A_i^j) \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{2}(A + A^T),$$

odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$A_j^i - A_i^j = 2 \cdot C_j^i, \quad \text{čili} \quad C_j^i = \frac{1}{2}(A_j^i - A_i^j) \quad \text{a} \quad C = \frac{1}{2}(A - A^T). \quad \square$$

Příklad. Buď

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matice nad polem $\mathbb{R}$. Potom

$$\frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{je symetrická matice,}$$

$$\frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{je antisymetrická matice a}$$

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T). \quad \square$$

1.3. Elementární úpravy a speciální tvary matic

1.3.1. Elementární úpravy

Definice 1.3.1. Mějme matici nad polem P . Řádkové elementární úpravy matice jsou

- (1) přičtení c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku, kde $c \in P$ a $i \neq j$,
- (2) vynásobení i -tého řádku nenulovým prvkem $c \in P$,
- (3) vzájemná výměna i -tého řádku a j -tého řádku.

Sloupkové elementární úpravy matice definujeme analogicky.

Cvičení. Proveďte vzájemnou výměnu dvou řádků pomocí konečně mnoha úprav typů (1) a (2). $\square$

Mějme matici A . Přičtením c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku změníme i -tý řádek na $(A_1^i + cA_1^j \quad A_2^i + cA_2^j \quad \dots \quad A_n^i + cA_n^j)$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Po vynásobení i -tého řádku prvkem $c \in P$ i -tý řádek bude $(cA_1^i \quad cA_2^i \quad \dots \quad cA_n^i)$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Po vzájemné výměně i -tého řádku a j -tého řádku i -tý řádek bude $(A_1^j \quad A_2^j \quad \dots \quad A_n^j)$, j -tý řádek bude $(A_1^i \quad A_2^i \quad \dots \quad A_n^i)$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Sloupkové úpravy fungují analogicky pro sloupky.

Příklad. (1) Přičtením 3-násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního sloupku a třetího sloupku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Ke všem elementárním úpravám existují úpravy inverzní, které jsou také elementární a upravenou matici převedou zpět na původní matici. Inverzní úpravy k řádkovým úpravám jsou

- (1) přičtení $-c$ -násobku j -tého řádku k i -tému řádku,
- (2) vynásobení i -tého řádku prvkem c^{-1} ,
- (3) vzájemná výměna i -tého řádku a j -tého řádku.

Inverzní úpravy ke sloupkovým úpravám jsou obdobné.

Příklad. (1) Přičtením -3 -násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního sloupku a třetího sloupku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Definice 1.3.2. Matice A, B jsou *ekvivalentní*, jestliže B může vzniknout z A konečnou posloupností elementárních úprav. Je-li možné toho dosáhnout pomocí pouze řádkových, resp. sloupkových úprav, matice jsou *řádkově*, resp. *sloupkově ekvivalentní*. V každém případě značíme $A \sim B$.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Tvrzení 1.3.1. *Ekvivalence matic je relace ekvivalence na množině všech matic stejného typu nad stejným polem.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

1.3.2. Schodovitý, Gaussův–Jordanův a Gaussův kanonický tvaru matic

Připomeňme si definice z podkapitoly 1.1.

Definice 1.3.3. Matice je ve *schodovitém tvaru* (nebo také *odstupňovaném tvaru*), jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního řádku, začíná zleva více nulami než řádek předchozí.

Z toho plyne, že v matici ve schodovitém tvaru všechny řádky pod nulovým řádkem jsou nulové.

Definice 1.3.4. Matice je v *Gaussově–Jordanově tvaru*, jestliže

- (i) je ve schodovitém tvaru,
- (ii) v každém nenulovém řádku první (zleva) nenulový prvek je 1,
- (iii) v každém sloupku, ve kterém je první nenulový prvek nějakého řádku, ostatní prvky jsou 0.

Definice 1.3.5. Matice je v *Gaussově kanonickém tvaru*, jestliže je buď nulová, nebo jednotková, nebo rovna matici

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková matice a 0 označuje nulové matice příslušných typů.

Příklad. (1) Necht

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A není ve schodovitém tvaru. Matice B je ve schodovitém tvaru, ale není v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice C je v Gaussově–Jordanově tvaru.

(2) Každá nulová matice je ve schodovitém tvaru i v Gaussově–Jordanově tvaru i v Gaussově kanonickém tvaru. $\square$

Definice 1.3.6. Mějme nenulovou matici. *Gaussova eliminace* je úprava matice podle následujícího algoritmu.

Buď $i = 1$.

- (1) Uvažujme první sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i -tém nebo nižším řádku.
- (2) Není-li v i -tém řádku uvažovaného sloupku nenulový prvek, vyměníme i -tý řádek s vhodným nižším řádkem.
- (3) V uvažovaném sloupku vynulujeme prvky v řádcích pod i -tým řádkem přičtením vhodných násobků i -tého řádku.
- (4) Vezměme i o 1 větší ($i := i + 1$). Existuje-li sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i -tém nebo nižším řádku, vraťme se do bodu (1). Jestliže takový sloupek neexistuje, algoritmus končí.

Tvrzení 1.3.2. Každá matice je řádkově ekvivalentní matici ve schodovitém tvaru.

Důkaz. Nulová matice je ve schodovitém tvaru. Libovolnou nenulovou matici upravíme pomocí Gaussovy eliminace. Všechny provedené úpravy jsou řádkové elementární úpravy a z postupu při Gaussově eliminaci vyplývá, že každý nenulový řádek, kromě prvního řádku, začíná více nulami než řádek předchozí. $\square$

Z Tvzení 1.5.2 a 1.5.3 vyplývá, že počet nenulových řádků v matici získané Gaussovou eliminací je určen jednoznačně, nezávisí na tom, jak byla Gaussova eliminace použita, přesněji, k jaké výměně řádků došlo v bodě (2).

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \quad (\text{výměna 1. a 2. řádku})$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \quad (\text{výměna 1. a 3. řádku})$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \square$$

Definice 1.3.7. Sloupek matice je *bázový*, jestliže není lineární kombinací předchozích sloupků.

Podle poznámky za Definicí 1.2.3 nulový sloupek je lineární kombinací sloupků z jakékoliv, i prázdné množiny sloupků. Proto nulový sloupek není bázový, ani když je prvním sloupkem matice.

Bázové sloupky matice jsou právě ty sloupky, které jsou uvažovány v bodě (1) v Gaussově eliminaci (rozmyslete si).

Pozice (indexy) bázových sloupků v matici jsou maticí určeny jednoznačně.

Definice 1.3.8. Mějme nenulovou matici. *Gaussova–Jordanova eliminace* je úprava matice podle následujícího algoritmu.

Buď $i = 1$.

- (1) Uvažujme první nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i -tém nebo nižším řádku.
- (2) Není-li v i -tém řádku uvažovaného sloupku nenulový prvek, vyměníme i -tý řádek s vhodným nižším řádkem.
- (3) i -tý řádek vynásobíme převrácenou hodnotou jeho prvního nenulového prvku.
- (4) V uvažovaném sloupku vynulujeme prvky mimo i -tý řádek přičtením vhodných násobků i -tého řádku.
- (5) Vezměme i o 1 větší ($i := i + 1$). Existuje-li nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i -tém nebo nižším řádku, vraťme se do bodu (1). Jestliže takový sloupek neexistuje, algoritmus končí.

Gaussovu–Jordanovu eliminaci je možné ekvivalentně definovat i tak, že matici upravíme pomocí Gaussovy eliminace (na schodovitý tvar), každý nenulový řádek vynásobíme převrácenou hodnotou jeho prvního nenulového prvku a vynulujeme všechny prvky nad všemi prvními nenulovými prvky řádků.

Tvrzení 1.3.3. *Každá matice je řádkově ekvivalentní matici v Gaussově–Jordanově tvaru.*

Důkaz. Nulová matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. Libovolnou nenulovou matici upravíme pomocí Gaussovy–Jordanovy eliminace. Všechny provedené úpravy jsou řádkové elementární úpravy a z postupu při Gaussově–Jordanově eliminaci vyplývá, že výsledná matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. $\square$

Maticí je jednoznačně určena řádkově ekvivalentní matice v Gaussově–Jordanově tvaru, tedy pro každou matici existuje právě jedna matice v Gaussově–Jordanově tvaru řádkově ekvivalentní původní matici.

Tvrzení 1.3.4. *Každá matice je ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru.*

Důkaz. Pro nulovou matici a jednotkovou matici není co dokazovat. Libovolnou jinou matici lze převést na ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru s použitím řádkových i sloupkových elementárních úprav a pomocí algoritmu, který získáme vhodnou úpravou Gaussovy–Jordanovy eliminace. Podrobnosti ponecháme jako cvičení. $\square$