

11. přednáška, 9. 12. 2025

Tvrzení 9.2.5. *Nechť vektory $v_1, \dots, v_n$ generují prostor V a $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ je lineárně nezávislá. Pak $m \leq n$.*

Důkaz. Každý z vektorů $u_1, \dots, u_m$ je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_n$, takže pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ existují koeficienty $a_i^1, \dots, a_i^n$ takové, že $u_i = a_i^1 v_1 + \dots + a_i^n v_n$. Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

upravme pomocí řádkových elementárních úprav na matici A' ve schodovitém tvaru. Provedeme-li stejné elementární úpravy s m -ticí $u_1, \dots, u_m$, dostaneme ekvivalentní m -ticí $u'_1, \dots, u'_m$. Lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_n$ s koeficienty z jednotlivých řádků matice A' jsou rovny právě vektorům $u'_1, \dots, u'_m$. Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m\}$ plyne lineární nezávislost množiny $\{u'_1, \dots, u'_m\}$ a také lineární nezávislost, tedy i nenulovost řádků matice A' . Jelikož A' je ve schodovitém tvaru a všechny řádky má nenulové, nemá více řádků než sloupků, tedy $m \leq n$.

Tvrzení je také součástí Tvrzení 9.2.7. □

Lemma 9.2.6 (Lemma o výměně). *Bud' $v_1, \dots, v_n \in V$ a $u = a^1 v_1 + \dots + a^n v_n$. Pak pro každé i takové, že $a^i \neq 0$, platí $\llbracket v_1, \dots, v_n \rrbracket = \llbracket v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n \rrbracket$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a^1 \neq 0$ (pro jiné indexy je důkaz stejný). Potom

$$v_1 = \frac{1}{a^1} u - \sum_{i=2}^n \frac{a^i}{a^1} v_i.$$

Bud' $w \in \llbracket v_1, \dots, v_n \rrbracket$. Existují tedy $b^1, b^2, \dots, b^n$ takové, že

$$\begin{aligned} w &= b^1 v_1 + b^2 v_2 + \dots + b^n v_n = \\ &= \frac{b^1}{a^1} u - \sum_{i=2}^n \frac{b^1 a^i}{a^1} v_i + b^2 v_2 + \dots + b^n v_n = \\ &= \frac{b^1}{a^1} u + \sum_{i=2}^n \left(b^i - \frac{b^1 a^i}{a^1} \right) v_i \in \llbracket u, v_2, \dots, v_n \rrbracket. \end{aligned}$$

Bud' $w \in \llbracket u, v_2, \dots, v_n \rrbracket$. Existují tedy $c^1, c^2, \dots, c^n$ takové, že

$$\begin{aligned} w &= c^1 u + c^2 v_2 + \dots + c^n v_n = \\ &= c^1 \sum_{i=1}^n a^i v_i + \sum_{i=2}^n c^i v_i = \\ &= c^1 a^1 v_1 + \sum_{i=2}^n (c^1 a^i + c^i) v_i \in \llbracket v_1, \dots, v_n \rrbracket. \end{aligned} \quad \square$$

Tvrzení 9.2.7 (Steinitzova věta o výměně). *Nechť vektory $v_1, \dots, v_n$ generují prostor V a $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ je lineárně nezávislá. Pak $m \leq n$ a existují indexy $i_1, \dots, i_{n-m} \in \{1, \dots, n\}$ takové, že*

$$\llbracket v_1, \dots, v_n \rrbracket = \llbracket u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}} \rrbracket.$$

Důkaz. Množina $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá, takže všechny u_i jsou nenulové. Vektor u_1 je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_n$ s aspoň jedním nenulovým koeficientem a stejně jako v předchozím důkazu předpokládejme, že nenulový koeficient je u v_1 . Z Lemmatu o výměně dostaneme $\llbracket v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket = \llbracket u_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket$.

Potom vektor u_2 je lineární kombinací vektorů $u_1, v_2, \dots, v_n$ s aspoň jedním nenulovým koeficientem u vektorů $v_2, \dots, v_n$ (jinak by množina $\{u_1, u_2\}$ byla lineárně závislá). Opět pro jednoduchost předpokládejme, že nenulový koeficient je u v_2 . Z Lemmatu o výměně dostaneme $\llbracket u_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket = \llbracket u_1, u_2, v_3, \dots, v_n \rrbracket$.

Takto pokračujeme, dokud buď nepoužijeme všechny vektory $u_1, \dots, u_m$ nebo nevyměníme všechny vektory $v_1, \dots, v_n$ za vektory $u_1, \dots, u_n$. Kdyby bylo $m > n$, vektory $u_{n+1}, \dots, u_m$ by byly lineární kombinace vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$ ve sporu s lineární nezávislostí množiny $\{u_1, \dots, u_m\}$. Takže $m \leq n$ a

$$\llbracket v_1, \dots, v_n \rrbracket = \llbracket u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}} \rrbracket. \quad \square$$

9.3. Báze

Definice 9.3.1. *Báze* vektorového prostoru je libovolná uspořádaná lineárně nezávislá množina jeho generátorů.

Obvykle tedy budeme bázi vektorového prostoru zapisovat jako uspořádanou n -tici vektorů. Pokud nebude záležet na uspořádání vektorů v bázi, budeme ji někdy zapisovat jen jako množinu vektorů.

Příklad. (1) (6) je báze $\mathbb{R}$.

(2) $((1, 0), (0, 1))$ je báze $\mathbb{R}^2$.

(3) $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ je báze $\mathbb{R}^3$.

(4) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ buď e_i vektor z $\mathbb{R}^n$, který má na i -tém místě jedničku a jinde nuly. Potom $(e_1, \dots, e_n)$ je báze $\mathbb{R}^n$ a nazývá se *kanonická* nebo také *standardní*.

(5) $(x^2, x, 1)$ je báze $\mathbb{R}_2[x]$. $\square$

Tvrzení 9.3.1. *Každý konečněrozměrný vektorový prostor má bázi.*

Důkaz. Podle definice konečněrozměrný vektorový prostor má konečnou množinu generátorů. Ukážeme, že v ní existuje lineárně nezávislá podmnožina, která generuje tentýž vektorový prostor a je tedy jeho báze. Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ množina generátorů vektorového prostoru. Z této množiny postupně pro $i = 1, \dots, n$ vyloučíme vektor v_i , je-li lineární kombinací předchozích. Tedy v_1 vyloučíme, pokud $v_1 = 0$. Vektory, které nevyloučíme, označme $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$. Je-li prvek množiny generátorů lineární kombinací ostatních prvků této množiny, po jeho vyloučení z této množiny zůstane opět množina generátorů stejného vektorového prostoru (ověřte). Proto vektory $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ generují tentýž vektorový prostor.

Díky uvedenému postupu žádný z vektorů $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ není lineární kombinací předchozích a množina $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ je lineárně nezávislá. $\square$

I nulový prostor $\{0\}$ má bázi. Je jí $\emptyset$, jelikož je lineárně nezávislá a $\llbracket \emptyset \rrbracket = \{0\}$.

Tvrzení 9.3.2. *Všechny báze jednoho konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Buďte $(v_1, \dots, v_n)$ a $(u_1, \dots, u_m)$ báze vektorového prostoru V . Jelikož vektory $v_1, \dots, v_n$ generují V a $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá množina, podle Tvrzení 9.2.5 $m \leq n$. Obdobně dostaneme, že $n \leq m$. Takže $n = m$. $\square$

Definice 9.3.2. *Dimenze vektorového prostoru je počet vektorů (libovolné) jeho báze. Vektorový prostor V dimenze n je n -rozměrný, zapisujeme $\dim V = n$. Nulový vektorový prostor $\{0\}$ je 0-rozměrný.*

Příklad. (1) Vektorový prostor P^n nad polem P je n -rozměrný. Jednou z bází je n -tice (kanonická báze) $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$.

(2) Vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$ je dvojrozměrný. Jednou z bází je dvojice $(1, i)$. Vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{C}$ je jednorozměrný, jednu z bází tvoří vektor 1. Vidíme, že dva vektorové prostory mohou mít různé dimenze, přestože mají stejné množiny vektorů.

(3) Vektorový prostor $\mathbb{C}^n$ nad polem $\mathbb{R}$ je $2n$ -rozměrný. Jednou z bází je $2n$ -tice

$$\begin{aligned} &((1, 0, \dots, 0), (i, 0, \dots, 0), \\ &(0, 1, 0, \dots, 0), (0, i, 0, \dots, 0), \\ &\dots, \\ &(0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, i)). \end{aligned}$$

□

Definice 9.3.3. (1) *Minimální množina generátorů* vektorového prostoru V je množina generátorů prostoru V , jejíž žádná vlastní podmnožina negeneruje V .

(2) *Maximální lineárně nezávislá množina vektorů* vektorového prostoru V je lineárně nezávislá množina vektorů z V , která není vlastní podmnožinou žádné lineárně nezávislé množiny.

Tvrzení 9.3.3. *Bud' $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (1) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je báze V ;
- (2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je minimální množina generátorů V ;
- (3) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je maximální lineárně nezávislá množina vektorů V .

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Je-li $\{v_1, \dots, v_n\}$ báze, je to množina generátorů a žádný z nich není lineární kombinací ostatních. Tudíž žádná její vlastní podmnožina negeneruje V a $\{v_1, \dots, v_n\}$ je minimální množina generátorů.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\{v_1, \dots, v_n\}$ je množina generátorů. Jelikož je minimální, žádný z jejích vektorů není lineární kombinací ostatních, takže je navíc lineárně nezávislá, čili báze.

(1) $\Rightarrow$ (3): Je-li $\{v_1, \dots, v_n\}$ báze, je lineárně nezávislá a každý vektor z V je lineární kombinací vektorů báze. Tudíž každá vlastní nadmnožina je lineárně závislá a tato je tedy maximální.

(3) $\Rightarrow$ (1): Množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. Jelikož je maximální, po přidání libovolného vektoru z V , dostaneme lineárně závislou množinu a ten přidaný vektor (ty původní to být nemohou) je lineární kombinací předchozích, takže $\{v_1, \dots, v_n\}$ je navíc množina generátorů, čili báze. □

Tvrzení poskytuje dvě alternativní definice báze, které se často používají. Má také důležité důsledky.

Důsledek. *Bud' $n \in \mathbb{N}$. Je-li V n -rozměrný vektorový prostor, pak*

- (1) *libovolná jeho n -prvková lineárně nezávislá podmnožina tvoří jeho bázi;*
- (2) *libovolná jeho n -prvková množina generátorů tvoří jeho bázi.*

Důkaz. (1) Prostor V má n -prvkovou množinu generátorů, takže podle Tvrzení 9.2.5 každá n -prvková lineárně nezávislá podmnožina je maximální, tedy báze.

(2) V prostoru V existuje n -prvková lineárně nezávislá množina, takže podle Tvrzení 9.2.5 každá n -prvková množina generátorů je minimální, tedy báze. □

Důsledek. *Bud' $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineárně nezávislá podmnožina n -rozměrného vektorového prostoru V . Pak ji lze doplnit do báze $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$.*

Důkaz. V případě, že $v_1, \dots, v_k$ generují V , tvoří bázi. Jinak existuje vektor $v_{k+1} \in V$, který není lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_k$, načež množina $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ je lineárně nezávislá, protože v_{k+1} není lineární kombinací předchozích vektorů.

Po $n - k$ opakováních téže úvahy získáme n -prvkovou lineárně nezávislou množinu $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$, která je bází podle předchozího důsledku. $\square$