

### 14.5. Souřadnice vzhledem k ortonormální bázi

**Tvrzení 14.5.1.** *Nechť  $V$  je prostor se skalárním součinem,  $(e_1, \dots, e_n)$  jeho ortogonální báze a  $v \in V$ . Pak*

$$v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n,$$

*čili  $i$ -tá souřadnice vektoru  $v$  vzhledem k uvedené bázi je*

$$x^i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} = \frac{(v, e_i)}{\|e_i\|^2}.$$

*Je-li  $(e_1, \dots, e_n)$  navíc ortonormální báze, pak*

$$v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n,$$

*čili  $i$ -tá souřadnice vektoru  $v$  vzhledem k uvedené bázi je*

$$x^i = (v, e_i).$$

*Důkaz.* Nechť  $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$ . Pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} x^i &= & (e_i \neq 0 \text{ a } (e_i, e_i) \neq 0) \\ &= x^i \frac{(e_i, e_i)}{(e_i, e_i)} = & ((e_i, e_j) = 0 \text{ pro } i \neq j) \\ &= x^1 \frac{(e_1, e_i)}{(e_i, e_i)} + \dots + x^i \frac{(e_i, e_i)}{(e_i, e_i)} + \dots + x^n \frac{(e_n, e_i)}{(e_i, e_i)} = \\ &= \frac{1}{(e_i, e_i)} (x^1 (e_1, e_i) + \dots + x^n (e_n, e_i)) = \\ &= \frac{1}{(e_i, e_i)} (x^1 e_1 + \dots + x^n e_n, e_i) = \\ &= \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} = \frac{(v, e_i)}{\|e_i\|^2}. \end{aligned}$$

Pokud  $(e_1, \dots, e_n)$  je ortonormální báze, pak zřejmě  $x^i = (v, e_i)$ . □

**Tvrzení 14.5.2.** *Nechť  $V$  je prostor se skalárním součinem,  $(e_1, \dots, e_n)$  jeho ortonormální báze,  $u, v \in V$ ,  $x = (x^1, \dots, x^n)$  souřadnice vektoru  $u$  a  $y = (y^1, \dots, y^n)$  souřadnice vektoru  $v$  vzhledem k uvedené bázi. Potom*

$$(u, v) = x^T \bar{y} = x^1 \bar{y}^1 + \dots + x^n \bar{y}^n.$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} (u, v) &= \left( \sum_{i=1}^n x^i e_i, \sum_{j=1}^n y^j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x^i e_i, y^j e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i \bar{y}^j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x^i \bar{y}^i. \end{aligned}$$

□

## 14.6. Kolmost množin

**Definice 14.6.1.** Buď  $V$  prostor se skalárním součinem,  $v \in V$  a  $M, N \subseteq V$ . Vektor  $v$  je *kolmý na množinu*  $M$ , jestliže  $v$  je kolmý na každý vektor z  $M$ , zapisujeme  $v \perp M$ . Množina  $M$  je *kolmá na množinu*  $N$ , jestliže každý vektor množiny  $M$  je kolmý na každý vektor množiny  $N$ , zapisujeme  $M \perp N$ .

**Cvičení.** V průniku kolmých množin může být jen nulový vektor. □

Například, dvě roviny v  $\mathbb{R}^3$  nejsou vzájemně kolmé.

**Tvrzení 14.6.1.** Buď  $V$  prostor se skalárním součinem a  $M, N \subseteq V$ . Potom  $M \perp N$  právě tehdy, když  $\llbracket M \rrbracket \perp N$ , a to je právě tehdy, když  $\llbracket M \rrbracket \perp \llbracket N \rrbracket$ .

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $M \perp N$ . Buď  $u \in \llbracket M \rrbracket$  a  $v \in N$ , čili  $u = p^1 u_1 + \dots + p^n u_n$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$ , skaláry  $p^1, \dots, p^n$  a vektory  $u_1, \dots, u_n \in M$ . Potom

$$\begin{aligned}(u, v) &= (p^1 u_1 + \dots + p^n u_n, v) = \\ &= p^1 (u_1, v) + \dots + p^n (u_n, v) = 0.\end{aligned}$$

Takže  $\llbracket M \rrbracket \perp N$ .

Opačná implikace a druhá ekvivalence jsou zřejmé. □

Chceme-li ověřit, zda vektor  $v \in V$  je kolmý na podprostor  $U \subseteq V$ , díky předcházejícímu tvrzení stačí ověřit, zda vektor  $v$  je kolmý na všechny vektory z libovolné množiny generátorů podprostoru  $U$ .

## 14.7. Ortogonální doplněk

**Definice 14.7.1.** Nechť  $V$  je prostor se skalárním součinem a  $U \subseteq V$ . *Ortogonální doplněk*  $U^\perp$  množiny  $U$  je množina všech vektorů z  $V$  kolmých na každý vektor z  $U$ , tedy

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \text{ pro všechna } u \in U\}.$$

Množina  $U^\perp$  je tedy největší množina kolmá na  $U$ .

**Tvrzení 14.7.1.** Buď  $V$  prostor se skalárním součinem,  $U, U_1, U_2 \subseteq V$ . Pak

- (1) jestliže  $U_1 \subseteq U_2$ , pak  $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$ ,
- (2)  $U^\perp = \llbracket U \rrbracket^\perp$ ,
- (3)  $U^\perp$  je podprostor  $V$ .

*Důkaz.* (1) Je-li  $U_1 \subseteq U_2$  a  $v \in U_2^\perp$ , tedy  $v \perp U_2$ , potom  $v \perp U_1$  a  $v \in U_1^\perp$ .  
 (2) Pro  $v \in V$  podle Tvrzení 14.6.1  $v \in U^\perp$  právě tehdy, když  $v \in \llbracket U \rrbracket^\perp$ .  
 (3) Zřejmě  $0 \in U^\perp$ . Pro libovolné  $v_1, v_2 \in U^\perp$  a  $u \in U$  platí  $(v_1 + v_2, u) = (v_1, u) + (v_2, u) = 0$ , takže  $v_1 + v_2 \in U^\perp$ . Pro libovolný skalár  $p$ ,  $v \in U^\perp$  a  $u \in U$  platí  $(pv, u) = p(v, u) = 0$ , takže  $pv \in U^\perp$ . □

## 14.8. Ortogonální projekce

**Definice 14.8.1.** Buď  $V$  prostor se skalárním součinem,  $v \in V$  a  $U$  podprostor  $V$ . Vektor  $u \in U$  je *ortogonální projekce (kolmý průmět) vektoru*  $v$  *do podprostoru*  $U$ , jestliže  $(v - u) \perp U$ , tedy  $v - u \in U^\perp$ . Označujeme  $u = v_U$  nebo  $u = \text{pr}_U(v)$ .

Z definice vyplývá, že je-li  $v \in U$ , potom  $v_U = v$ .

**Tvrzení 14.8.1.** *Bud'  $V$  prostor se skalárním součinem,  $U$  podprostor  $V$  a  $v \in V$ . Pak pro každý vektor  $u \in U$ ,  $u \neq v_U$ , platí*

$$\|v - v_U\| < \|v - u\|.$$

*Ortogonalní projekce vektoru do podprostoru je určena jednoznačně, pokud existuje.*

*Důkaz.* Podle definice  $v_U \in U$  a  $(v - v_U) \perp U$ , takže pro každé  $u \in U$  platí  $(v - v_U) \perp (v_U - u)$ . Pro  $u \neq v_U$  navíc

$$\begin{aligned} \|v - v_U\|^2 &< & (\|v_U - u\| > 0) \\ &< \|v - v_U\|^2 + \|v_U - u\|^2 = & (\text{Pythagorova věta}) \\ &= \|(v - v_U) + (v_U - u)\|^2 = \\ &= \|v - u\|^2. \end{aligned}$$

Nechť  $u_1, u_2 \in U$  jsou ortogonální projekce vektoru  $v$  do podprostoru  $U$ . Předpokládejme, že  $u_1 \neq u_2$ . Potom podle právě dokázaného

$$\|v - u_1\| < \|v - u_2\| \quad \text{a zároveň} \quad \|v - u_2\| < \|v - u_1\|.$$

Dostáváme spor, takže  $u_1 = u_2$  a ortogonální projekce je tedy určena jednoznačně.  $\square$

**Tvrzení 14.8.2.** *Bud'  $V$  prostor se skalárním součinem,  $U$  jeho konečněrozměrný podprostor a  $(e_1, \dots, e_m)$  ortogonální báze podprostoru  $U$ . Pak pro každé  $v \in V$  platí*

$$\text{pr}_U(v) = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dots + \frac{(v, e_m)}{(e_m, e_m)} e_m.$$

*Je-li  $(e_1, \dots, e_m)$  navíc ortonormální báze, pak*

$$\text{pr}_U(v) = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_m) e_m.$$

*Důkaz.* Vektor  $u = u^1 e_1 + \dots + u^m e_m \in U$  je ortogonální projekce vektoru  $v$  do podprostoru  $U = \llbracket e_1, \dots, e_m \rrbracket$  právě tehdy, když vektor  $v - u$  je kolmý ke každému vektoru z  $U$ , což je právě tehdy, když  $v - u$  je kolmý ke každému  $e_i$ , to je právě tehdy, když pro každé  $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} 0 &= (v - u, e_i) = (v, e_i) - (u, e_i) = \\ &= (v, e_i) - (u^1 e_1 + \dots + u^m e_m, e_i) = \\ &= (v, e_i) - u^1 (e_1, e_i) - \dots - u^m (e_m, e_i) = \\ &= (v, e_i) - u^i (e_i, e_i) \end{aligned}$$

a to je právě tehdy, když  $u^i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$ , jelikož  $(e_i, e_i) \neq 0$ .

Pokud  $(e_1, \dots, e_n)$  je ortonormální báze, pak zřejmě  $u^i = (v, e_i)$ .  $\square$

## 14.9. Gramova-Schmidtova ortogonalizace

**Tvrzení 14.9.1.** *V každém konečněrozměrném prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.*

*Důkaz.* Existenci ortonormální báze dokážeme pomocí *Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace*.

Bud'  $V$  konečněrozměrný prostor se skalárním součinem a  $(v_1, \dots, v_n)$  jeho báze. Ukažme, že existuje jeho ortogonální báze.

- (1) Položme  $e_1 = v_1$ . Potom vektor  $e_1$  je nenulový,  $\{e_1\}$  je lineárně nezávislá množina a  $\llbracket e_1 \rrbracket = \llbracket v_1 \rrbracket$ .
- (2) Postupně pro  $k = 1, \dots, n-1$  předpokládejme, že máme  $\{e_1, \dots, e_k\}$  ortogonální množinu nenulových vektorů (tedy lineárně nezávislou množinu) takovou, že  $\llbracket e_1, \dots, e_k \rrbracket = \llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket$ . Označme  $U_k = \llbracket e_1, \dots, e_k \rrbracket$ . Vektor  $e_{k+1}$  získáme tak, že od vektoru  $v_{k+1}$  odečteme jeho ortogonální projekci do podprostoru  $U_k$ . Tedy

$$e_{k+1} = v_{k+1} - \text{pr}_{U_k}(v_{k+1}) = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(v_{k+1}, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i.$$

Podle definice ortogonální projekce vektor  $e_{k+1}$  je kolmý na  $U_k$ , tedy na všechny vektory z  $U_k$ , včetně  $e_1, \dots, e_k$ . Množina  $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$  je tedy ortogonální.

Jelikož báze je lineárně nezávislá, vektor  $v_{k+1}$  není prvkem podprostoru  $U_k$  a nerovná se tedy své ortogonální projekci  $\text{pr}_{U_k}(v_{k+1})$  do tohoto podprostoru. Proto  $e_{k+1}$  je nenulový vektor a množina  $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$  je lineárně nezávislá.

K tomu,  $\llbracket e_1, \dots, e_{k+1} \rrbracket = \llbracket v_1, \dots, v_{k+1} \rrbracket$ . Platí  $e_1 = v_1$  a  $e_i, i \in \{2, \dots, k+1\}$ , je lineární kombinace vektorů  $e_1, \dots, e_{i-1}, v_i$ , proto  $\llbracket e_1, \dots, e_{k+1} \rrbracket \subseteq \llbracket v_1, \dots, v_{k+1} \rrbracket$ . Na druhou stranu,  $v_i$  pro  $i \in \{1, \dots, k+1\}$  je lineární kombinace vektorů  $e_1, \dots, e_i$ , proto  $\llbracket v_1, \dots, v_{k+1} \rrbracket \subseteq \llbracket e_1, \dots, e_{k+1} \rrbracket$ .

Takže pro každé  $k \in \{1, \dots, n\}$  ( $e_1, \dots, e_k$ ) je ortogonální báze prostoru  $U_k$  a  $U_n = V$ .

Nakonec,

$$\left( \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right)$$

je ortonormální báze prostoru  $V$ . □

V předchozím důkazu je možné vždy po získání  $e_k$  tento vektor normovat a dostat tak ortonormální bázi prostoru  $U_k$ . V takovém případě se zjednoduší výpočet ortogonální projekce do podprostoru  $U_k$  a tedy i výpočet vektoru  $e_{k+1}$ .

## 14.10. Vlastnosti ortogonálního doplňku

**Tvrzení 14.10.1.** *Nechť  $V$  je prostor se skalárním součinem a  $U$  jeho konečněrozměrný podprostor. Pak*

- (1)  $U^{\perp\perp} = U$ ,
- (2)  $V = U \dot{+} U^\perp$ ,
- (3) *je-li  $V$  konečněrozměrný, potom  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ .*

*Důkaz.* (1) Každý vektor z  $U$  je kolmý na  $U^\perp$ , takže  $U \subseteq U^{\perp\perp}$ . Buď  $v \in U^{\perp\perp}$ . Tedy  $v$  je kolmý na každý vektor z  $U^\perp$ . Jelikož podprostor  $U$  je konečněrozměrný, existuje  $v_U$ . Podle definice ortogonální projekce  $v_U \in U$  a  $v - v_U \in U^\perp$ , čili  $v_U \perp (v - v_U)$  a zároveň  $v \perp (v - v_U)$ . Takže

$$\|v - v_U\|^2 = (v - v_U, v - v_U) = (v, v - v_U) - (v_U, v - v_U) = 0 - 0 = 0,$$

proto  $v = v_U \in U$ , čili  $U^{\perp\perp} \subseteq U$  a celkově  $U^{\perp\perp} = U$ .

(2) Opět, podprostor  $U$  je konečněrozměrný, takže ke každému vektoru  $v \in V$  existuje jeho ortogonální projekce do  $U$ , přičemž  $v_U \in U$ ,  $v - v_U \in U^\perp$  a  $v = v_U + (v - v_U)$ . Takže  $V = U + U^\perp$ . Jelikož  $U$  a  $U^\perp$  jsou vzájemně kolmé, v jejich průniku je jen nulový vektor. Z toho vyplývá, že  $V = U \dot{+} U^\perp$ .

(3) Z předchozího bodu a Tvrzení 10.3.2 dostaneme  $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$ . □

**Tvrzení 14.10.2.** *Nechť  $V$  je prostor se skalárním součinem,  $U_1, U_2$  jeho konečněrozměrné podprostory. Potom*

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp.$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2 &\Rightarrow (U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp, U_2^\perp &\Rightarrow (U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp \\ U_1 \cap U_2 \subseteq U_1, U_2 &\Rightarrow U_1^\perp, U_2^\perp \subseteq (U_1 \cap U_2)^\perp &\Rightarrow U_1^\perp + U_2^\perp \subseteq (U_1 \cap U_2)^\perp \end{aligned}$$

V právě dokázaných vztazích místo  $U_1, U_2$  použijeme  $U_1^\perp, U_2^\perp$  a dostaneme

$$\begin{aligned} (U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp &\subseteq U_1^{\perp\perp} \cap U_2^{\perp\perp} = U_1 \cap U_2 &\Rightarrow (U_1 \cap U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp + U_2^\perp \\ U_1 + U_2 = U_1^{\perp\perp} + U_2^{\perp\perp} &\subseteq (U_1^\perp \cap U_2^\perp)^\perp &\Rightarrow U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1 + U_2)^\perp \end{aligned}$$

Nakonec, zřejmě

$$U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq U_1^\perp + U_2^\perp. \quad \square$$

**Cvičení.** Najděte  $V, U_1, U_2$  takové, že  $(U_1 \cap U_2)^\perp \not\subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$ .  $\square$

## 14.11. Shodnosti—ortogonální a unitární transformace a matice

### 14.11.1. Shodnosti—ortogonální a unitární transformace

Shodnost je lineární transformace, která zachovává skalární součin.

**Definice 14.11.1.** Buď  $V$  prostor se skalárním součinem. Lineární transformace  $f: V \rightarrow V$  je *shodnost*, jestliže pro každé  $u, v \in V$

$$(f(u), f(v)) = (u, v).$$

V eukleidovském případě se shodnost nazývá také *ortogonální transformace*, v hermiteovském případě se shodnost nazývá také *unitární transformace*.

Když shodnost zachovává skalární součin, zachovává i normu, kolmost a v eukleidovském případě i odchylku vektorů, což jsou pojmy zavedené pomocí skalárního součinu. Platí i některé opačné implikace.

**Tvrzení 14.11.1.** *Buď  $f$  lineární transformace prostoru  $V$  se skalárním součinem. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (1)  $f$  je shodnost;
- (2)  $f$  zachovává délky vektorů, tj.  $\|f(v)\| = \|v\|$  pro každé  $v \in V$ ;
- (3)  $f$  zobrazuje jednotkové vektory na jednotkové vektory;
- (4)  $f$  zachovává ortonormalitu, tj.  $f(U)$  je ortonormální množina pro každou ortonormální množinu  $U$ .

*Důkaz.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Je-li  $f$  shodnost, pro každé  $v \in V$

$$\|f(v)\| = \sqrt{(f(v), f(v))} = \sqrt{(v, v)} = \|v\|.$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) Předpokládejme, že  $f$  zachovává délky vektorů. Potom

$$\begin{aligned} \operatorname{re}(f(u), f(v)) &= && \text{(Lemma 14.1.2)} \\ &= \frac{1}{2}(\|f(u) + f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && \text{(linearita } f) \\ &= \frac{1}{2}(\|f(u+v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && (f \text{ zachovává délky}) \\ &= \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = && \text{(Lemma 14.1.2)} \\ &= \operatorname{re}(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(f(u), f(v)) &= && \text{(Lemma 14.1.2)} \\ &= \frac{1}{2}(\|f(u) + \mathbf{i}f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && \text{(linearita } f) \\ &= \frac{1}{2}(\|f(u + \mathbf{i}v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && (f \text{ zachovává délky}) \\ &= \frac{1}{2}(\|u + \mathbf{i}v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = && \text{(Lemma 14.1.2)} \\ &= \operatorname{im}(u, v). \end{aligned}$$

Tedy,

$$(f(u), f(v)) = (u, v).$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) Zřejmé.

(3)  $\Rightarrow$  (2) Necht'  $f$  zobrazuje jednotkové vektory na jednotkové vektory. Jelikož  $f(0) = 0$ ,  $\|f(0)\| = \|0\|$ . Buď  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ . Potom  $\|v\| \neq 0$  a

$$\begin{aligned} \|f(v)\| &= \left\| f\left(\frac{\|v\|}{\|v\|}v\right) \right\| = && (f \text{ je lineární}) \\ &= \left\| \|v\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = && \text{(Lemma 14.1.1)} \\ &= \|v\| \left\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = && \left( \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1 \Rightarrow \left\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = 1 \right) \\ &= \|v\|. \end{aligned}$$

(1)  $\Rightarrow$  (4) Necht'  $f$  je shodnost. Buď  $U$  ortonormální množina. Potom pro  $f(u), f(v) \in f(U)$ ,  $f(u) \neq f(v)$ , platí

$$(f(u), f(v)) = (u, v) = 0 \quad \text{a} \quad \|f(u)\| = \|u\| = 1.$$

Čili,  $f(U)$  je ortonormální množina.

(4)  $\Rightarrow$  (3) Zřejmé. □

**Příklad.** (1) V eukleidovském prostoru  $E^2$ : rotace kolem nulového vektoru, osová souměrnost.

(2) V eukleidovském prostoru  $E^3$ : rotace kolem osy, rovinová souměrnost (zrcadlení), středová souměrnost. □

Na druhou stranu, když lineární transformace zachovává kolmost nebo zachovává odchylky vektorů, ještě to neznamená, že to je shodnost.

**Cvičení.** Uveďte příklady zobrazení, která zachovávají kolmost nebo zachovávají odchylky vektorů, ale nejsou to shodnosti. □

**Tvrzení 14.11.2.** Buď  $V$  konečněrozměrný prostor se skalárním součinem,  $(e_1, \dots, e_n)$  jeho ortonormální báze a  $f$  jeho lineární transformace. Pak  $f$  je shodnost právě tehdy, když  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  je ortonormální báze  $V$ .

*Důkaz.* Implikace „ $\Rightarrow$ “ je snadné cvičení.

Nechť  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  je ortonormální báze. Buďte  $u, v \in V$ ,  $u = \sum x^i e_i$ ,  $v = \sum y^i e_i$ ,  $x = (x^1, \dots, x^n)$  a  $y = (y^1, \dots, y^n)$ . Potom  $f(u) = \sum x^i f(e_i)$ ,  $f(v) = \sum y^i f(e_i)$  a podle Tvzení 14.5.2

$$(u, v) = x^T \bar{y} = (f(u), f(v)). \quad \square$$

**Tvrzení 14.11.3.** *Každá shodnost konečněrozměrného vektorového prostoru se skalárním součinem je izomorfismus.*

*Důkaz.* Shodnost je lineární zobrazení. Je tedy potřeba dokázat již jen bijektivnost. Buď  $u \in \text{Ker } f$ , tedy  $f(u) = 0$ . Potom  $\|u\| = \|f(u)\| = 0$  a  $u = 0$ . Takže,  $\text{Ker } f = \{0\}$  a  $f$  je injektivní.

Dále  $\dim \text{Im } f = \dim V - \dim \text{Ker } f = \dim V$ , proto  $\text{Im } f = V$  a  $f$  je surjektivní.  $\square$

**Tvrzení 14.11.4.** *Složení shodností je shodnost.*

*Důkaz.* Cvičení.  $\square$