

14. SKALÁRNÍ SOUČIN

Označení. Číslo komplexně sdružené k číslu z označujeme $\bar{z}$. Je-li $A = (A_j^i)$ matice, označujeme $\bar{A} = (\overline{A_j^i})$.

Definice 14.0.1. Buď V vektorový prostor nad P , kde $P = \mathbb{R}$ nebo $P = \mathbb{C}$. Zobrazení $g: V \times V \rightarrow P$ je *skalární součin* na V , jestliže pro libovolné $u, v, w \in V$ a $p \in P$ platí

- (1) $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$;
- (2) $g(pu, v) = pg(u, v)$;
- (3) $g(u, v) = \overline{g(v, u)}$;
- (4) $g(v, v) > 0$ pro $v \neq 0$.

Číslo $g(v, v)$ je reálné pro každý vektor v , i v případě, že $P = \mathbb{C}$ (cvičení). Díky tomu lze ve čtvrté vlastnosti porovnávat $g(v, v)$ s 0.

První dvě vlastnosti znamenají, že skalární součin je *lineární v prvním argumentu*, třetí vlastnost je v reálném případě *symetrie*, v komplexním případě *kosá symetrie*, čtvrtá vlastnost je *pozitivní definitnost*.

Definice 14.0.2. Vektorový prostor nad P se skalárním součinem je *prostor se skalárním součinem*. Pokud $P = \mathbb{R}$, skalární součin je *eukleidovský* a prostor je *eukleidovský*. Pokud $P = \mathbb{C}$, skalární součin je *hermiteovský* a prostor je *hermiteovský* nebo *unitární*.

Označení. Nemůže-li dojít k nedorozumění, místo $g(u, v)$ píšeme jen (u, v) .

Tvrzení 14.0.1. Buď V prostor se skalárním součinem nad P . Pro libovolné $u, v, w \in V$ a $p \in P$ platí

- (1) $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$;
- (2) $(u, pv) = \overline{p}(u, v)$;
- (3) $(0, v) = (v, 0) = 0$;
- (4) $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Důkaz. (1)

$$(u, v + w) = \overline{(v + w, u)} = \overline{(v, u) + (w, u)} = \overline{(v, u)} + \overline{(w, u)} = (u, v) + (u, w).$$

(2)

$$(u, pv) = \overline{(pv, u)} = \overline{p(v, u)} = \overline{p} \overline{(v, u)} = \overline{p}(u, v).$$

(3)

$$(0, v) = (0 \cdot v, v) = 0 \cdot (v, v) = 0 \quad \text{a} \quad (v, 0) = \overline{(0, v)} = 0.$$

(4) Důsledek podmínky (4) v definici skalárního součinu a předchozího bodu (3). $\square$

Podle (1) a (2) v předchozím tvrzení Eukleidovský skalární součin je lineární i v druhém argumentu.

Příklad. (1) Standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$,

$$(x, y) = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n.$$

(2) Standardní skalární součin na $\mathbb{C}^n$. Pro $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$,

$$(x, y) = x^1 \overline{y^1} + \dots + x^n \overline{y^n}.$$

(3) Buďte $a_1, \dots, a_n$ kladná reálná čísla. Zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, které vektorům $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadí číslo

$$(x, y) = a_1 x^1 y^1 + \dots + a_n x^n y^n,$$

je skalární součin na $\mathbb{R}^n$.

(4) Buďte $a_1, \dots, a_n$ kladná reálná čísla. Zobrazení $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, které vektorům $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{C}^n$ přiřadí číslo

$$(x, y) = a_1 x^1 \overline{y^1} + \dots + a_n x^n \overline{y^n},$$

je skalární součin na $\mathbb{C}^n$.

(5) Zobrazení, které maticím $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ přiřadí číslo

$$(A, B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_j^i B_j^i,$$

je skalární součin na $\mathbb{R}^{m \times n}$.

(6) Zobrazení, které maticím $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ přiřadí číslo

$$(A, B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_j^i \overline{B_j^i},$$

je skalární součin na $\mathbb{C}^{m \times n}$.

(7) Zobrazení, které spojitým reálným funkcím f, g na intervalu $[0, 2\pi]$ přiřadí reálné číslo

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

je skalární součin na prostoru všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, 2\pi]$. $\square$

14.1. Délka (norma) vektoru

Připomeňme, že $(v, v) \in \mathbb{R}$ a $(v, v) \geq 0$ pro každé v .

Definice 14.1.1. Buď V prostor se skalárním součinem, $v \in V$. *Délka* nebo *norma* vektoru v je číslo

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}.$$

Definice 14.1.2. Vektor délky 1 je *jednotkový* nebo *normovaný*.

Délka vektoru tedy závisí na skalárním součinu, a tak uvedené značení lze použít jen, je-li jasné, který skalární součin je uvažován a nemůže dojít k nedorozumění.

Příklad. (1) Mějme standardní skalární součin na $\mathbb{R}^2$. Délka vektoru $(1, 2)$ je $\sqrt{5}$.

(2) Na $\mathbb{R}^2$ mějme skalární součin $((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = x^1 y^1 + 2x^2 y^2$. Délka vektoru $(1, 2)$ je 3.

(3) Na prostoru všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, 1]$ mějme skalární součin

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Takže délka (norma) funkce f je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}.$$

Pokud, například, $f(x) = x$, potom

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

Tvrzení 14.1.1. *Bud' V prostor se skalárním součinem nad P . Pro libovolné $v \in V$ a $p \in P$ platí*

- (1) $\|v\| \geq 0$, navíc $\|v\| = 0$ právě tehdy, když $v = 0$,
- (2) $\|pv\| = |p|\|v\|$,
- (3) jestliže $v \neq 0$, pak

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1.$$

Důkaz. (1) Jednoduchý důsledek definice skalárního součinu a Tvrzení 14.0.1.

$$(2) \|pv\| = \sqrt{(pv, pv)} = \sqrt{p\bar{p}(v, v)} = \sqrt{|p|^2 \|v\|^2} = |p|\|v\|.$$

(3) Cvičení.

□

Lemma 14.1.2. (1) $\operatorname{re}(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$
 (2) $\operatorname{im}(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$

Důkaz. (1)

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \\ &= (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) = \\ &= (u, u) + (u, v) + \overline{(u, v)} + (v, v) = \\ &= \|u\|^2 + 2\operatorname{re}(u, v) + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Z toho dostaneme

$$\operatorname{re}(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$$

(2)

$$\begin{aligned} \|u + iv\|^2 &= (u + iv, u + iv) = \\ &= (u, u) + (u, iv) + (iv, u) + (iv, iv) = \\ &= (u, u) - i(u, v) + i\overline{(u, v)} + (v, v) = \\ &= \|u\|^2 + 2\operatorname{im}(u, v) + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Z toho dostaneme

$$\operatorname{im}(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$$

□

14.2. Nerovnosti

Tvrzení 14.2.1 (Cauchyova-Bunjakovského-Schwarzova nerovnost). *Nechť V je prostor se skalárním součinem a $u, v \in V$. Pak*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\{u, v\}$ je lineárně závislá množina.

Důkaz. Předpokládejme, že $\{u, v\}$ je lineárně závislá. Pokud $u = 0$ nebo $v = 0$, pak $|(u, v)| = \|u\| \|v\| = 0$. Jsou-li u, v nenulové, existuje $p \in P$ takové, že $u = pv$ a

$$|(u, v)| = |(pv, v)| = |p|(v, v) = |p|\|v\|^2 = |p|\|v\| \|v\| = \|pv\| \|v\| = \|u\| \|v\|.$$

Je-li $\{u, v\}$ lineárně nezávislá, pak u, v jsou nenulové a pro každé $p \in P$ je $u - pv \neq 0$. Pro

$$p = \frac{(u, v)}{(v, v)}$$

platí

$$0 = (u, v) - p(v, v) = (u, v) - (pv, v) = (u - pv, v).$$

Tedy

$$\begin{aligned} 0 &< \|u - pv\|^2 = (u - pv, u - pv) = \\ &= (u - pv, u) - \overline{p}(u - pv, v) = && ((u - pv, v) = 0) \\ &= \|u\|^2 - p(v, u) = && (p = (u, v)/\|v\|^2) \\ &= \|u\|^2 - \frac{(u, v)}{\|v\|^2} \cdot \overline{(u, v)} = \\ &= \|u\|^2 - \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

Čili

$$\begin{aligned} 0 &< \|u\|^2 - \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^2} && (\text{obě strany vynásobíme } \|v\|^2) \\ 0 &< \|u\|^2 \|v\|^2 - |(u, v)|^2 \\ |(u, v)|^2 &< \|u\|^2 \|v\|^2 && (\text{obě strany odmocníme}) \\ |(u, v)| &< \|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

□

Důležitý důsledek Cauchyovy-Bunjakovského-Schwarzovy nerovnosti je následující tvrzení, které je známé jako trojúhelníková nerovnost.

Tvrzení 14.2.2 (Trojúhelníková nerovnost). *Nechť V je prostor se skalárním součinem a $u, v \in V$. Pak*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\{u, v\}$ je lineárně závislá množina.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= && (\text{důkaz Lemmatu 14.1.2}) \\ &= \|u\|^2 + 2\operatorname{re}(u, v) + \|v\|^2 \leq && (\operatorname{re}(u, v) \leq |(u, v)|) \\ &\leq \|u\|^2 + 2|(u, v)| + \|v\|^2 \leq && (\text{Tvrzení 14.2.1}) \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 = \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Zbytek důkazu je jednoduché cvičení. □

14.3. Odchylka vektorů

Pro nenulové vektory u, v můžeme Cauchyovu–Bunjakovského–Schwarzovu nerovnost zapsat ve tvaru

$$\frac{|(u, v)|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

a v eukleidovském případě

$$-1 \leq \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|} \leq 1.$$

Funkce $\cos$ zúžená na interval $[0, \pi]$ je injektivní a tento interval zobrazuje vzájemně jednoznačně na interval $[-1, 1]$. Pro každou dvojici nenulových vektorů u, v tedy existuje právě jedno reálné číslo $\varphi \in [0, \pi]$ takové, že

$$\cos \varphi = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}.$$

Definice 14.3.1. Buďte V eukleidovský prostor a $u, v \in V$ nenulové. *Odchylka* vektorů u, v (nebo *úhel* mezi vektory u, v) je číslo $\varphi \in [0, \pi]$ takové, že

$$\cos \varphi = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}.$$

Pro libovolný eukleidovský skalární součin tedy platí

$$(u, v) = \|u\| \|v\| \cos \varphi.$$

Tvrzení 14.3.1 (Kosinová věta). *Buďte V eukleidovský prostor, $u, v \in V$ nenulové a φ úhel mezi nimi. Potom*

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \|v\| \cos \varphi.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= (u - v, u - v) = (u, u) - 2(u, v) + (v, v) = \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \|v\| \cos \varphi. \end{aligned}$$

□

14.4. Ortogonalita (kolmost)

Definice 14.4.1. Buď V prostor se skalárním součinem. Vektory $u, v \in V$ jsou *kolmé* (nebo *ortogonální*), jestliže $(u, v) = 0$. Zapisujeme $u \perp v$.

Dva nenulové vektory v eukleidovském prostoru jsou tedy kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je $\pi/2$.

Díky tomu, že $(u, v) = \overline{(v, u)}$, kolmost vektorů nezávisí na jejich pořadí. Jelikož pro každý vektor $v \in V$ platí $(v, 0) = 0$, nulový vektor je kolmý ke každému vektoru. Z toho, že $(pu, qv) = p\bar{q}(u, v)$ pro každé $p, q \in P$, vyplývá, že libovolné skalární násobky kolmých vektorů jsou také kolmé.

Definice 14.4.2. Buď V prostor se skalárním součinem. Množina $U \subset V$ je *ortogonální*, jestliže $u \perp v$ pro libovolné různé $u, v \in U$. Ortogonální množina normovaných vektorů je *ortonormální*.

Když v ortogonální množině nenulových vektorů každý vektor vynásobíme převrácenou hodnotou jeho délky (každý vektor znormujeme), dostaneme ortonormální množinu.

Tvrzení 14.4.1. Každá ortogonální množina nenulových vektorů je lineárně nezávislá.

Důkaz. Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonální množina nenulových vektorů. Necht

$$p^1 v_1 + \dots + p^n v_n = 0.$$

Když pro libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$ obě strany této rovnosti skalárně vynásobíme zprava vektorem v_i , dostaneme

$$\begin{aligned} (p^1 v_1 + \dots + p^n v_n, v_i) &= (0, v_i) && \text{(linearita v prvním argumentu)} \\ p^1 (v_1, v_i) + \dots + p^n (v_n, v_i) &= 0 && \text{(kolmost)} \\ p^i (v_i, v_i) &= 0 && (v_i \neq 0 \text{ a } (v_i, v_i) > 0) \\ p^i &= 0. \end{aligned}$$

Takže $p^i = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. $\square$

Důsledek. Každá n -prvková ortogonální množina nenulových vektorů v n -rozměrném prostoru je báze tohoto prostoru.

Příklad. (1) Mějme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Kanonická báze je ortonormální.

(2) Mějme prostor všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, 2\pi]$ se skalárním součinem

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Množina $\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots\}$ je ortogonální. $\square$

Tvrzení 14.4.2 (Pythagorova věta). Budť V prostor se skalárním součinem a $u, v \in V$ kolmé. Pak

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \\ &= (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) = && (u \perp v) \\ &= (u, u) + (v, v) = \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Cvičení. Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonální množina. Ukažte, že

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2. \quad \square$$