

13. JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Úmluva. V této kapitole V je vektorový prostor (obvykle konečněrozměrný) nad polem P a $f: V \rightarrow V$ je lineární transformace.

13.1. První rozklad lineární transformace

13.1.1. Anulující polynom a minimální polynom

Definice 13.1.1. Nechť $p \in P[x]$, $p \neq 0$. Polynom p je *anulující polynom* čtvercové matice A (resp. lineární transformace f), jestliže $p(A) = 0$ (resp. $p(f) = 0$).

Tvrzení 13.1.1 (Cayleyho-Hamiltonova věta). *Charakteristický polynom matice je její anulující polynom.*

Důkaz. Podle Tvrzení 2.3.1 pro libovolnou čtvercovou matici B platí $B \cdot \text{adj } B = \det B \cdot E$. Tedy, i pro matici $A - xE$

$$(A - xE) \cdot \text{adj}(A - xE) = \det(A - xE) \cdot E = \chi_A \cdot E. \quad (12)$$

Je-li matice A typu $n \times n$, pak její charakteristický polynom χ_A je polynom stupně n , označme

$$\chi_A = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0.$$

Podle Definice 2.3.1 prvky v adjungované matici $\text{adj}(A - xE)$ jsou polynomy neurčité x stupně nejvýše $n - 1$. Takže, matici $\text{adj}(A - xE)$ můžeme vyjádřit

$$\text{adj}(A - xE) = C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0,$$

kde C_i jsou čtvercové matice typu $n \times n$.

Po dosazení do (12) máme

$$(A - xE) \cdot (C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0) = (c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0) \cdot E,$$

tj.

$$\begin{aligned} & -C_{n-1}x^n + (AC_{n-1} - C_{n-2})x^{n-1} + \cdots + (AC_1 - C_0)x + AC_0 = \\ & = c_n Ex^n + \cdots + c_1 Ex + c_0 E. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x obdržíme $n + 1$ rovností

$$\begin{aligned} -C_{n-1} &= c_n E, \\ -C_{n-2} + AC_{n-1} &= c_{n-1} E, \\ &\vdots \\ -C_0 + AC_1 &= c_1 E, \\ AC_0 &= c_0 E. \end{aligned}$$

Jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, n+1\}$ i -tou rovnost vynásobíme zleva $(n+1-i)$ -tou mocninou A^{n+1-i} matice A , dostaneme

$$\begin{aligned} -A^n C_{n-1} &= c_n A^n, \\ -A^{n-1} C_{n-2} + A^n C_{n-1} &= c_{n-1} A^{n-1}, \\ &\vdots \\ -AC_0 + A^2 C_1 &= c_1 A, \\ AC_0 &= c_0 E. \end{aligned}$$

Když tyto rovnosti sečteme, dostaneme

$$0 = c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 E,$$

což se mělo dokázat. $\square$

Důsledek. *Charakteristický polynom lineární transformace je její anulující polynom.*

Příklad. Matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $\chi_A = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$, ale $q = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ je také anulující polynom matice A (ověřte). $\square$

Poslední příklad ukazuje, že charakteristický polynom může mít netriviálního dělitele, který je rovněž anulujícím polynomem. Ukažme, že mezi anulujícími polynomy existuje jeden, který dělí všechny ostatní.

Definice 13.1.2. Anulující polynom je *minimální polynom*, je-li normovaný a nejmenšího stupně ze všech anulujících polynomů.

Tvrzení 13.1.2. *Každý anulující polynom je dělitelný minimálním polynomem.*

Důkaz. Buď f anulující polynom matice A , buď g minimální polynom matice A . Dělme se zbytkem: $f = qg + r$, kde buď $r = 0$ nebo $\deg r < \deg g$. Do rovnosti dosadíme A a dostaneme

$$0 = f(A) = q(A)g(A) + r(A) = r(A),$$

protože f a g jsou anulující polynomy. Kdyby $r \neq 0$, byl by to anulující polynom nižšího stupně než minimální polynom g , což je spor, a proto $r = 0$ a g je dělitelem f . $\square$

Důsledek. *Ke každé lineární transformaci konečněrozměrného vektorového prostoru resp. ke každé čtvercové matici existuje minimální polynom a je jediný.*

Cvičení. Dokažte jednoznačnost minimálního polynomu. $\square$

13.1.2. Invariantní podprostory

Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak symbolem fU označujeme jeho obraz při zobrazení f , to jest, podprostor $\{f(u) \mid u \in U\}$.

Definice 13.1.3. Podprostor $U \subseteq V$ je *invariantní* vzhledem k lineární transformaci f , jestliže $fU \subseteq U$, tj. když pro každé $u \in U$ je $f(u) \in U$.

Je-li U invariantní podprostor, pak zobrazení $U \rightarrow U$, zadané předpisem $u \mapsto f(u)$, nazýváme *restrikce* (česky *ohraničení* nebo *zúžení*) lineárního zobrazení f na invariantní podprostor U . Značí se $f|_U: U \rightarrow U$ a je zřejmě opět lineární (ověřte).

Příklad. (1) Celý prostor V a nulový podprostor jsou invariantní podprostory vzhledem ke každé lineární transformaci.

(2) Je-li $f: v \mapsto cv$, pak je každý podprostor invariantní.

(3) Je-li u vlastní vektor s vlastní hodnotou c , pak $\llbracket u \rrbracket$ je invariantní podprostor a $f|_{\llbracket u \rrbracket}$ je zobrazení $v \mapsto cv$.

(4) Mějme rotaci $\varphi: E^3 \rightarrow E^3$ kolem zvolené pevné osy L procházející počátkem 0 o úhel $\alpha \in (0, 2\pi)$. Invariantní podprostory jsou nulový podprostor $\{0\}$, osa rotace L , její ortogonální doplněk $L^\perp$ (rovina procházející počátkem kolmo k L) a celý prostor E^3 . Libovolný vektor $u \in L$ se zobrazí sám na sebe, proto $\varphi|_L$ je identické zobrazení id_L . Libovolný vektor $v \in L^\perp$ zůstane v rovině $L^\perp$ a $\varphi|_{L^\perp}$ je otáčení roviny $L^\perp$ o úhel α .

(5) Mějme zrcadlení ζ v prostoru E^3 vzhledem k rovině U procházející počátkem 0 . Invariantní podprostory jsou nulový podprostor $\{0\}$, rovina U a každý její podprostor $V \subseteq U$, ortogonální doplněk $U^\perp$ (přímka procházející počátkem kolmo k U) a celý prostor E^3 . Zobrazení $\zeta|_V$ je identické zobrazení id_V . Zobrazení $\zeta|_{U^\perp}$ je zrcadlení přímky $U^\perp$ vzhledem k počátku 0 . $\square$

Cvičení. (1) Jednorozměrný podprostor $\llbracket u \rrbracket$, $u \neq 0$, je invariantní právě tehdy, když u je vlastní vektor. Dokažte.

(2) Průnik a součet invariantních podprostorů jsou invariantní podprostory. Dokažte.

(3) $\text{Ker } f$ je invariantní podprostor. Dokažte. Co je $f|_{\text{Ker } f}$?

(4) $\text{Im } f$ je invariantní podprostor. Dokažte.

(5) Buď $v \in V$ libovolný vektor. Dokažte, že $\llbracket v, f(v), f(f(v)), f(f(f(v))), \dots \rrbracket$ je invariantní podprostor.

(6) Nechť lineární transformace $f, g: V \rightarrow V$ komutují, to jest, $f \circ g = g \circ f$. Buď $U \subseteq V$ invariantní podprostor vzhledem k transformaci f . Pak gU je též invariantní podprostor vzhledem k transformaci f . $\square$

13.1.3. První rozklad lineární transformace

Tvrzení 13.1.3. Buď q anulující polynom lineární transformace $f: V \rightarrow V$ a necht' existuje rozklad $q = q_1 \cdots q_n$, kde $q_1, \dots, q_n$ jsou po dvou nesoudělné ($D(q_i, q_j) = 1$ pro $i \neq j$). Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ označme $U_i = \text{Ker } q_i(f)$. Pak platí:

(1) každý podprostor U_i je invariantní;

(2) $V = U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$;

(3) pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ polynom q_i je anulujícím polynomem transformace $f|_{U_i}$.

Důkaz. (1) Nechť $u \in U_i$, tj. $q_i(f)(u) = 0$. Potom

$$q_i(f)(f(u)) = (q_i(f) \circ f)(u) = (f \circ q_i(f))(u) = f(q_i(f)(u)) = f(0) = 0$$

(použili jsme to, že f a $q_i(f)$ spolu komutují podle Důsledku Tvrzení 11.6.7). Tudíž, $f(u) \in U_i$.

(2) Nejdříve případ $n = 2$. Nechť $q = q_1 q_2$ a $D(q_1, q_2) = 1$. Pak existují polynomy p_1, p_2 takové, že $1 = q_1 p_1 + q_2 p_2$. Dosazením f získáváme rovnost

$$\text{id} = q_1(f) \circ p_1(f) + q_2(f) \circ p_2(f),$$

takže pro libovolný vektor $v \in V$ platí

$$v = q_1(f)(p_1(f)(v)) + q_2(f)(p_2(f)(v)). \quad (13)$$

Ukažme, že první sčítanec $q_1(f)(p_1(f)(v))$ z (13) leží v U_2 . Označíme-li $w = p_1(f)(v)$, stačí ověřit, že $q_1(f)(w) \in \text{Ker } q_2(f)$:

$$q_2(f)(q_1(f)(w)) = (q_2(f) \circ q_1(f))(w) = (q_2 q_1)(f)(w) = q(f)(w) = 0,$$

protože q je anulující polynom pro f . Podobně se ukáže, že druhý ze sčítanců leží v U_1 . Tudiž, $v \in U_1 + U_2$. Protože v byl libovolný vektor z V , máme $V = U_1 + U_2$.

Ukažme ještě, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Nechť tedy $v \in U_1 \cap U_2$, tj. $q_1(f)(v) = 0$ a $q_2(f)(v) = 0$. Rovnost (13) platí i po záměně $p \leftrightarrow q$ (protože $p_i(f)$ a $q_i(f)$ spolu komutují podle Důsledku Tvzení 11.6.7), načež

$$v = p_1(f)(q_1(f)(v)) + p_2(f)(q_2(f)(v)) = p_1(f)(0) + p_2(f)(0) = 0,$$

protože $p_1(f), p_2(f)$ jsou lineární zobrazení. Dokázali jsme tedy, že $V = U_1 \dot{+} U_2$.

Obecný případ $n > 2$ se dokáže indukcí (cvičení).

(3) Polynom q_i je anulujícím polynomem transformace $f|_{U_i}$, protože $\text{Ker } q_i(f) = U_i$, načež

$$\text{Ker } q_i(f|_{U_i}) = \text{Ker}(q_i(f)|_{U_i}) = U_i \cap \text{Ker } q_i(f) = U_i, \text{ a tedy } q_i(f|_{U_i}) = 0. \quad \square$$

Tvrzení 13.1.4. *Nechť existuje přímý rozklad $V = U_1 \dot{+} U_2$, kde U_1, U_2 jsou invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci f . Zvolme nějakou bázi $(e_1, \dots, e_m)$ podprostoru U_1 a nějakou bázi $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ podprostoru U_2 . Pak $(e_1, \dots, e_n)$ je báze prostoru V a transformace f v ní má matici tvaru*

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_m^1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m & \dots & A_m^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{m+1}^{m+1} & \dots & A_n^{m+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{m+1}^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix}.$$

Označíme-li

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^m & \dots & A_m^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{m+1}^{m+1} & \dots & A_n^{m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m+1}^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix},$$

pak A_i je matice lineární transformace $f|_{U_i}$.

Důkaz. Ověřte, že $(e_1, \dots, e_n)$ je báze prostoru V .

Prvních m sloupků matice A je tvořeno souřadnicemi vektorů $f(e_1), \dots, f(e_m)$ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Vektory $f(e_1), \dots, f(e_m)$ ovšem leží v U_1 s bází $(e_1, \dots, e_m)$, takže koeficienty u vektorů $e_{m+1}, \dots, e_n$ v příslušné lineární kombinaci budou nulové.

Ověřte, že A_1 je matice lineární transformace $f|_{U_1}$ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_m)$.

Zbytek analogicky. $\square$

O shora uvedené matici A říkáme, že je v *blokově diagonálním tvaru* s bloky A_1, A_2 na diagonále. Stručně zapisujeme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Říkáme též, že A je *přímý součet submatic* A_1 a A_2 .

Podobně se v případě přímého součtu $V = U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$ invariantních podprostorů $U_1, \dots, U_n$ matice zobrazení f rozpadá na přímý součet submatic $A_1, \dots, A_n$ odpovídajících lineárním zobrazením $f|_{U_1}, \dots, f|_{U_n}$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

O matici A rovněž pravíme, že je *blokově diagonální*.

V ideálním případě lze prostor V rozložit na přímý součet jednorozměrných invariantních podprostorů, generovaných vlastními vektory, což je nám již známý případ diagonalizovatelné matice.

Příklad. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x-1)(x^2 - 4x + 5)$ (ověřte). Vidíme, že polynom χ_A je součinem nesoudělných polynomů $q_1 = x - 1$ a $q_2 = x^2 - 4x + 5$.

Matice A představuje lineární zobrazení $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $u \mapsto Au$. Počítejme $U_1 = \text{Ker } q_1(\alpha) = \text{Ker}(\alpha - \text{id})$. Jádro $\text{Ker}(\alpha - \text{id})$ vypočteme řešením rovnice $(\alpha - \text{id})(u) = 0$, což je homogenní soustava s maticí

$$q_1(A) = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a fundamentálním řešením $e_1 = (1, 1, 1)$ (ověřte). Dostáváme jednorozměrný invariantní podprostor

$$U_1 = \text{Ker } q_1(\alpha) = \llbracket (1, 1, 1) \rrbracket.$$

Podobně $U_2 = \text{Ker } q_2(\alpha) = \text{Ker}(\alpha^2 - 4\alpha + 5 \text{id})$. Toto jádro vypočteme řešením rovnice

$$(\alpha^2 - 4\alpha + 5 \text{id})(u) = 0,$$

což je homogenní soustava s maticí

$$q_2(A) = A^2 - 4A + 5E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a fundamentálním řešením $e_2 = (0, 0, 1)$, $e_3 = (1, -1, 0)$ (ověřte). Dostáváme dvojrozměrný invariantní podprostor

$$U_2 = \text{Ker } q_2(\alpha) = \llbracket (0, 0, 1), (1, -1, 0) \rrbracket.$$

Získali jsme (a) přímý rozklad $\mathbb{R}^3 = U_1 \dot{+} U_2$ na invariantní podprostory U_1 a U_2 ; (b) „novou“ bázi (e_1, e_2, e_3) . Matici přechodu od „staré“ kanonické báze k „nové“ bázi označme Q . Inverzní matice Q^{-1} je matice přechodu od „nové“ báze ke kanonické bázi. Tedy

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení α vzhledem k „nové“ bázi je tedy blokově diagonální matice

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad. Nechť $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, jehož matice vzhledem ke kanonické („staré“) bázi $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice A je $\chi_A = -x^2(x-2)$ a můžeme jej zapsat jako součin nesoudělných polynomů $q_1 = -x^2$ a $q_2 = x-2$. Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 2$.

Tedy

$$q_1(A) = -A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -6 & 6 & -12 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad q_2(A) = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom $U_1 = \text{Ker } q_1(A) = \text{Ker}(-A^2)$ je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $-A^2$ a $U_2 = \text{Ker } q_2(A) = \text{Ker}(A - 2E)$ je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $A - 2E$. Tedy $U_1 = \llbracket (-2, 0, 1), (1, 1, 0) \rrbracket$ a $U_2 = \llbracket (1, 3, 2) \rrbracket$.

Takže prostor $\mathbb{R}^3$ je přímým součtem invariantních podprostorů U_1, U_2 a vektory $(-2, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 3, 2)$ tvoří „novou“ bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Matice přechodu od „staré“ báze k „nové“ bázi je

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 5/2 & -3 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a matice zobrazení α vzhledem k „nové“ bázi je

$$A' = Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□