

11.4. Matice lineárního zobrazení

V příkladu (7) v 11.1 pro každou matici A typu $m \times n$ nad polem P je $f_A: P^n \rightarrow P^m$, $x \mapsto Ax$, lineární zobrazení.

Na druhou stranu, pro každé lineární zobrazení $f: P^n \rightarrow P^m$ existuje jediná matice A taková, že $f = f_A$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ buď e_i i -tý vektor kanonické báze P^n , tedy $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde 1 je na i -tém místě. Potom pro libovolné $x = (x^1, \dots, x^n) \in P^n$ platí

$$f(x) = f(x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) = x^1 f(e_1) + \dots + x^n f(e_n).$$

Čili pro matici A , jejíž sloupky jsou $f(e_1), \dots, f(e_n)$, platí $f(x) = Ax$ a $f = f_A$.

Obdobně lze libovolnému lineárnímu zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory přiřadit matici, která toto zobrazení popisuje, a to sice matici reprezentující příslušné lineární zobrazení mezi prostory souřadnic vektorů vzhledem ke zvoleným bázím vektorových prostorů.

Definice 11.4.1. Buďte U, V vektorové prostory, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ báze U , $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ báze V a $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Matice A typu $m \times n$, jejíž i -tý sloupek je tvořen souřadnicemi vektoru $f(u_i)$ vzhledem k bázi $\mathbf{v}$, je *matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$* . Jestliže f je lineární transformace, tedy $U = V$, a $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, potom A je *matice lineární transformace f vzhledem k bázi $\mathbf{v}$* .

Přesněji, A_i^j je j -tá souřadnice obrazu $f(u_i)$ vzhledem k bázi $\mathbf{v}$. Platí tedy

$$f(u_i) = \sum_j A_i^j v_j.$$

Tvrzení 11.4.1. Buďte U, V konečněrozměrné vektorové prostory, $\mathbf{u}$ báze U , $\mathbf{v}$ báze V , $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení, $u \in U$, A matice f , x souřadnice u , y souřadnice $f(u)$ vzhledem ke zvoleným bázím. Potom

$$y = Ax.$$

Je-li B matice taková, že $y = Bx$, potom $B = A$.

Důkaz. Necht' $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ a $y = (y^1, \dots, y^m)$. Jelikož $u = \sum_i x^i u_i$, tak

$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(\sum_i x^i u_i\right) = \sum_i f(x^i u_i) = \sum_i x^i f(u_i) = \sum_i x^i \sum_j A_i^j v_j = \\ &= \sum_j \sum_i x^i A_i^j v_j = \left(\sum_i x^i A_i^1\right) v_1 + \dots + \left(\sum_i x^i A_i^m\right) v_m. \end{aligned}$$

Čili j -tá souřadnice vektoru $f(u)$ vzhledem k bázi $\mathbf{v}$ je $y^j = \sum_i x^i A_i^j = \sum_i A_i^j x^i$, což je právě hodnota získaná na j -tém řádku součinu matic $A \cdot x$, a tedy $y = Ax$.

Buď B matice taková, že $y = Bx$. Potom B má n sloupků, aby součin Bx mohl existovat, a m řádků, aby se součin Bx mohl rovnat y . Čili B je typu $m \times n$ stejně jako A . Pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$ souřadnice vektoru u_i vzhledem k bázi $\mathbf{u}$ a $y_i = (y_i^1, \dots, y_i^m)$ souřadnice vektoru $f(u_i)$ vzhledem k bázi $\mathbf{v}$. Potom $x_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde 1 je na i -tém místě, a $y_i = Bx_i = B_i^\circ$. Podle definice matice lineárního zobrazení zároveň $y_i = A_i^\circ$, takže $B = A$. $\square$

Příklad. Mějme $\alpha: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, $f \mapsto f'$. Je to tedy zobrazení z prostoru polynomů stupně nejvýše 2 do prostoru polynomů stupně nejvýše 1, které polynomu přiřazuje jeho derivaci. Ověřte, že se jedná o lineární zobrazení.

V $\mathbb{R}_2[x]$ uvažujme bázi $(1, x, x^2)$ a v $\mathbb{R}_1[x]$ bázi $(1, x)$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(1, x, x^2)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(1, x)$.

$$\begin{aligned}\alpha(1) &= 0, & \text{souřadnice vektoru } 0 \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (0, 0); \\ \alpha(x) &= 1, & \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (1, 0); \\ \alpha(x^2) &= 2x, & \text{souřadnice vektoru } 2x \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (0, 2).\end{aligned}$$

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(1, x, x^2)$ a $(1, x)$ tedy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Například, $\alpha(3x^2 + 2x + 7) = 6x + 2$. Vektor $3x^2 + 2x + 7$ má v bázi $(1, x, x^2)$ souřadnice $x = (7, 2, 3)$ a vektor $6x + 2$ má v bázi $(1, x)$ souřadnice $y = (2, 6)$. Ověřte. A platí

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = y. \quad \square$$

Příklad. Matice identického zobrazení $\text{id}: U \rightarrow U$, $\text{id}(u) = u$, vzhledem k bázím $\mathfrak{e}$ a $\mathfrak{e}'$ (v tomto pořadí) je matice přechodu od báze $\mathfrak{e}$ k bázi $\mathfrak{e}'$. $\square$

Tvrzení 11.4.2. Bud' U, V, W vektorové prostory, $\mathfrak{u}$ báze U , $\mathfrak{v}$ báze V , $\mathfrak{w}$ báze W . Bud' $\alpha: U \rightarrow V$, $\beta: V \rightarrow W$ lineární zobrazení. Bud' A matice zobrazení α vzhledem k bázím $\mathfrak{u}$ a $\mathfrak{v}$, bud' B matice zobrazení β vzhledem k bázím $\mathfrak{v}$ a $\mathfrak{w}$. Potom BA je matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ vzhledem k bázím $\mathfrak{u}$ a $\mathfrak{w}$.

Důkaz. Necht' $\mathfrak{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\mathfrak{v} = (v_1, \dots, v_n)$ a $\mathfrak{w} = (w_1, \dots, w_p)$. Jelikož $\alpha(u_i) = \sum_j A_i^j v_j$ a $\beta(v_j) = \sum_k B_j^k w_k$, tak

$$\begin{aligned}(\beta \circ \alpha)(u_i) &= \beta(\alpha(u_i)) = \beta\left(\sum_j A_i^j v_j\right) = \sum_j A_i^j \beta(v_j) = \sum_j A_i^j \sum_k B_j^k w_k = \\ &= \sum_{j,k} A_i^j B_j^k w_k = \sum_k \sum_j A_i^j B_j^k w_k = \\ &= \left(\sum_j A_i^j B_j^1\right) w_1 + \dots + \left(\sum_j A_i^j B_j^p\right) w_p.\end{aligned}$$

Čili v k -tém řádku i -tého sloupku matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ je $\sum_j A_i^j B_j^k = \sum_j B_j^k A_i^j$, což je totéž, co dostaneme na stejném místě v součinu $B \cdot A$. $\square$

Tvrzení 11.4.3. Bud' α izomorfismus a A jeho matice vzhledem k nějakým bázím. Pak A je invertibilní a A^{-1} je matice inverzního izomorfismu α^{-1} .

Důkaz. Bud' $\alpha: U \rightarrow V$ a bud' B matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1}: V \rightarrow U$ vzhledem k příslušným bázím. Matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_U$ vzhledem k bázi prostoru U je jednotková matice E a podle předchozího tvrzení je to matice BA . Čili, $BA = E$, A je tedy invertibilní a $A^{-1} = B$. $\square$

Důsledek. Každá matice přechodu od báze k bázi je invertibilní.

Důkaz. Podle uvedených definic matice přechodu je totéž co matice identity, což je izomorfismus. $\square$

Tvrzení 11.4.4. Bud' U vektorový prostor s bázemi $\mathfrak{u}$ a $\mathfrak{u}'$, bud' Q matice přechodu od báze $\mathfrak{u}$ k bázi $\mathfrak{u}'$. Bud' V vektorový prostor s bázemi $\mathfrak{v}$ a $\mathfrak{v}'$, bud' R matice přechodu od

báze $\mathbf{v}$ k bázi $\mathbf{v}'$. Bud' $\alpha: U \rightarrow V$ lineární zobrazení, bud' A matice zobrazení α vzhledem k bázím $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ a bud' A' matice zobrazení α vzhledem k bázím $\mathbf{u}'$ a $\mathbf{v}'$. Pak

$$A' = RAQ^{-1}.$$

Důkaz. Necht' $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{u}' = (u'_1, \dots, u'_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ a $\mathbf{v}' = (v'_1, \dots, v'_m)$. Situaci můžeme znázornit diagramem

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} U \\ (u_1, \dots, u_n) \end{array}} & \xrightarrow[\begin{array}{c} \alpha \\ A \end{array}]{\quad} & \boxed{\begin{array}{c} V \\ (v_1, \dots, v_m) \end{array}} \\ \text{id}_U \downarrow Q & & \text{id}_V \downarrow R \\ \boxed{\begin{array}{c} U \\ (u'_1, \dots, u'_n) \end{array}} & \xrightarrow[\begin{array}{c} \alpha \\ A' \end{array}]{\quad} & \boxed{\begin{array}{c} V \\ (v'_1, \dots, v'_m) \end{array}} \end{array}$$

V rozích stojí vektorové prostory s vyznačenými bázemi, šipky označují lineární zobrazení a jsou u nich uvedeny také matice těchto zobrazení. Platí $\alpha \circ \text{id}_U = \text{id}_V \circ \alpha$ a také $\alpha = \text{id}_V \circ \alpha \circ \text{id}_U^{-1}$. Podle Tvzení 11.4.2 o matici složeného zobrazení potom

$$A'Q = RA \quad \text{a také} \quad A' = RAQ^{-1}. \quad \square$$

Příklad. Mějme $\alpha: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, $f \mapsto f'$. Je to tedy zobrazení z prostoru polynomů stupně nejvýše 2 do prostoru polynomů stupně nejvýše 1, které polynomu přiřazuje jeho derivaci.

(1) Nejprve uvažujme (staré) báze $(1, x, x^2)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ a $(1, x)$ v $\mathbb{R}_1[x]$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(1, x, x^2)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(1, x)$.

$$\begin{array}{ll} \alpha(1) = 0, & \text{souřadnice vektoru } 0 \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (0, 0); \\ \alpha(x) = 1, & \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (1, 0); \\ \alpha(x^2) = 2x, & \text{souřadnice vektoru } 2x \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (0, 2). \end{array}$$

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(1, x, x^2)$ a $(1, x)$ tedy je

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Nyní uvažujme (nové) báze $(x^2, x+1, x)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ a $(x+1, 1)$ v $\mathbb{R}_1[x]$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(x^2, x+1, x)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(x+1, 1)$.

$$\begin{array}{ll} \alpha(x^2) = 2x, & \text{souřadnice vektoru } 2x \text{ v bázi } (x+1, 1) \text{ jsou } (2, -2); \\ \alpha(x+1) = 1, & \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (x+1, 1) \text{ jsou } (0, 1); \\ \alpha(x) = 1, & \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (x+1, 1) \text{ jsou } (0, 1). \end{array}$$

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(x^2, x+1, x)$ a $(x+1, 1)$ tedy je

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Například, $\alpha(3x^2+2x+7) = 6x+2$. Vektor $3x^2+2x+7$ má staré souřadnice $a = (7, 2, 3)$ a nové souřadnice $a' = (3, 7, -5)$. Vektor $6x+2$ má staré souřadnice $b = (2, 6)$ a nové souřadnice $b' = (6, -4)$. Ověřte. A platí

$$A_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = b$$

a

$$A_2 \cdot a' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = b'.$$

Matice přechodu od staré báze $(1, x, x^2)$ k nové bázi $(x^2, x+1, x)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ je

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od staré báze $(1, x)$ k nové bázi $(x+1, 1)$ v $\mathbb{R}_1[x]$ je

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A platí

$$\begin{aligned} Q_2 \cdot A_1 \cdot Q_3^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2. \end{aligned} \quad \square$$

Poznámka. Pokud ve Tvzení 11.4.4 $U = V$, $u = v$ a $u' = v'$, tedy $Q = R$ a α je lineární transformace $V \rightarrow V$, potom

$$A' = Q A Q^{-1}.$$

Definice 11.4.2. Matice A je *podobná* matici B , jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = Q^{-1} A Q$. Zapisujeme $A \approx B$.
Zobrazení $A \mapsto Q^{-1} A Q$ je *podobnostní transformace*.

Cvičení. Dokažte, že relace $\approx$ je relace ekvivalence na množině všech čtvercových matic stejného typu nad stejným polem. $\square$

Příklad. Matice jedné lineární transformace vzhledem k různým bázím jsou podobné. $\square$

11.5. Determinant

Je-li $A = (A_j^i)$ čtvercová matice typu $n \times n$ nad polem P , potom $|\det A|$ je objem n -rozměrného rovnoběžnostěnu v P^n určeného vektory (vrcholy)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \\ \vdots \\ A_1^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2^1 \\ A_2^2 \\ \vdots \\ A_2^n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_n^1 \\ A_n^2 \\ \vdots \\ A_n^n \end{pmatrix}.$$

Nechť $f_A: P^n \rightarrow P^n$, $f_A(x) = Ax$ (viz Příklad (7) v podkapitole 11.1). Buď $(e_1, \dots, e_n)$ kanonická báze v P^n . Potom pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $f_A(e_i) = Ae_i = A_i^\circ$, čili obraz i -tého vektoru kanonické báze je i -tý sloupec matice A , A je tedy matice lineární transformace f_A vzhledem ke kanonické bázi, a obraz jednotkové krychle dané vrcholy $0, e_1, \dots, e_n$, jejíž objem je roven 1, je rovnoběžnostěn daný vrcholy $0, A_1^\circ, \dots, A_n^\circ$ o objemu $|\det A|$.

Volbou jiné báze dostaneme matici podobnou matici A se stejným determinanem.

Tvrzení 11.5.1. *Podobné matice mají stejné determinanty.*

Důkaz. Necht' A, B jsou podobné matice, tedy $B = Q^{-1}AQ$. Potom

$$\begin{aligned}\det B &= \det(Q^{-1}AQ) = \det Q^{-1} \cdot \det A \cdot \det Q = \\ &= \frac{1}{\det Q} \cdot \det A \cdot \det Q = \det A.\end{aligned}\quad \square$$

11.6. Algebraická struktura na množině lineárních zobrazení

Definice 11.6.1. Bud' U, V vektorové prostory nad polem P a $f, g: U \rightarrow V$ zobrazení.

- (1) Zobrazení $f + g: U \rightarrow V$, zadané předpisem

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u)$$
 pro libovolný vektor $u \in U$, je *součet* zobrazení f a g .
- (2) Bud' $c \in P$. Zobrazení $cf: U \rightarrow V$, zadané předpisem

$$(cf)(u) = c \cdot f(u)$$
 pro libovolný vektor $u \in U$, je *c-násobek* zobrazení f .

Tvrzení 11.6.1. *Bud' U, V vektorové prostory nad polem P , $f, g: U \rightarrow V$ lineární zobrazení a $c \in P$. Pak zobrazení $f + g$, cf jsou lineární.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

Bud' U, V vektorové prostory nad polem P . Množinu všech lineárních zobrazení z U do V označme $\text{Hom}_P(U, V)$. Tedy

$$\text{Hom}_P(U, V) = \{f: U \rightarrow V \mid f \text{ je lineární zobrazení nad polem } P\}.$$

Tvrzení 11.6.2. *Bud' U, V vektorové prostory nad polem P . Pak množina $\text{Hom}_P(U, V)$ s operacemi sčítání zobrazení a násobení zobrazení skalárem je vektorový prostor nad polem P .*

Důkaz. Cvičení. $\square$

Tvrzení 11.6.3. *Bud' U, V vektorové prostory nad polem P , $c \in P$, $f, g: U \rightarrow V$ lineární zobrazení a A, B jejich matice vzhledem ke zvoleným bázím. Pak*

- (1) $A + B$ je matice lineárního zobrazení $f + g$ vzhledem ke stejným bázím,
- (2) cA je matice lineárního zobrazení cf vzhledem ke stejným bázím.

Důkaz. Cvičení. $\square$

Tvrzení 11.6.4. *Bud' U, V konečnorozměrné vektorové prostory nad polem P , $\dim U = n$ a $\dim V = m$. Pak vektorový prostor $\text{Hom}_P(U, V)$ je izomorfní s prostorem $P^{m \times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad polem P .*

Důkaz. Tvrzení dokážeme tak, že najdeme příslušný izomorfismus. Bud' u báze U , v báze V a $\varphi: \text{Hom}_P(U, V) \rightarrow P^{m \times n}$ zobrazení, které každému lineárnímu zobrazení $f: U \rightarrow V$ přiřadí jeho matici vzhledem k bázím u a v .

Potom φ je bijekce, protože každá matice typu $m \times n$ je maticí právě jednoho lineárního zobrazení $U \rightarrow V$ vzhledem k uvedeným bázím (ověřte podrobně). Navíc, podle předchozího tvrzení φ je lineární, protože matice zobrazení $f + g$ je součet matic jednotlivých zobrazení f a g a matice zobrazení cf je c -násobek matice zobrazení f . $\square$

Na množině $\text{Hom}_P(V, V)$ můžeme navíc uvažovat binární operaci o skládání lineárních transformací s neutrálním prvkem id_V (množina s asociativní binární operací s neutrálním prvkem je *monoid*).

Tvrzení 11.6.5. *Bud' V vektorový prostor nad polem P . Pak pro libovolná $f, g, h \in \text{Hom}_P(V, V)$ a $c \in P$ platí*

$$\begin{aligned} f \circ (g + h) &= f \circ g + f \circ h, \\ (f + g) \circ h &= f \circ h + g \circ h, \\ f \circ (cg) &= (cf) \circ g = c(f \circ g). \end{aligned}$$

Důkaz. Cvičení. □

Algebraická struktura, která je současně monoid i vektorový prostor nad polem P a platí pro ni identity uvedené v předchozím tvrzení, je *asociativní P -algebra*. Tudíž, $\text{Hom}_P(V, V)$ je asociativní P -algebra.

Jiný příklad asociativní P -algebry je množina $P^{n \times n} (= \text{gl}(n, P))$ všech čtvercových matic typu $n \times n$ nad polem P vzhledem k binárním operacím násobení a sčítání matic a k operaci násobení skalárem (ověřte).

Podle předchozích tvrzení v konečněrozměrném případě P -algebra $\text{Hom}_P(V, V)$ je izomorfní P -algebře $\text{gl}(n, P)$.

Pro libovolné celé nezáporné číslo k zavedme lineární transformaci $f^k: V \rightarrow V$ předpisem

$$f^k(v) = \underbrace{f(f(\cdots f(v)\cdots))}_k \text{ pro libovolné } v \in V, \text{ tj. } f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_k.$$

Tedy, $f^0 = \text{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ a $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Definice 11.6.2. Bud' $p = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ polynom. Bud' $f: V \rightarrow V$ lineární transformace vektorového prostoru V nad polem P a A čtvercová matice nad polem P . Položme

$$\begin{aligned} p(f) &= a_m f^m + \cdots + a_1 f + a_0 \text{id}_V, \\ p(A) &= a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E, \end{aligned}$$

kde E je jednotková matice stejného rozměru jako matice A .

Lineární transformace $p(f)$, resp. matice $p(A)$ vznikla *dosazením lineární transformace f , resp. matice A do polynomu p* .

Hodnota transformace $p(f)$ ve vektoru $v \in V$ se zapisuje $p(f)(v)$.

Příklad. Necht' $p = x^2 - 2x + 2$. Pak pro libovolnou lineární transformaci $f: V \rightarrow V$ máme $p(f) = f^2 - 2f + 2\text{id}$ a pro libovolný vektor $v \in V$ máme $p(f)(v) = f(f(v)) - 2f(v) + 2v$. □

Tvrzení 11.6.6. *Bud' p polynom a bud' A matice lineární transformace f vzhledem k nějaké bázi. Pak $p(A)$ je matice lineární transformace $p(f)$ vzhledem k téže bázi.*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 11.6.7. *Bud' p, q polynomy. Pro libovolnou lineární transformaci f a libovolnou čtvercovou matici A platí*

$$\begin{aligned} (p+q)(f) &= p(f) + q(f), & (pq)(f) &= p(f) \circ q(f), \\ (p+q)(A) &= p(A) + q(A), & (pq)(A) &= p(A)q(A). \end{aligned}$$

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. *Budte p, q polynomy. Pro libovolnou lineární transformaci f a pro libovolnou čtvercovou matici A platí*

$$p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f), \qquad p(A)q(A) = q(A)p(A)$$

(říkáme, že $p(f)$ a $q(f)$ komutují a $p(A)$ a $q(A)$ komutují).