

3. přednáška, 3. 3. 2026

Lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy vektorů libovolné báze:

Tvrzení 11.1.1. *Buďte U, V vektorové prostory nad polem P , $(u_1, \dots, u_n)$ báze U . Pak pro každou n -tici $v_1, \dots, v_n \in V$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f: U \rightarrow V$ takové, že $f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$.*

Důkaz. Buďte $v_1, \dots, v_n \in V$. Pro $u \in U$ existují $x^1, \dots, x^n \in P$ tak, že $u = x^1 u_1 + \dots + x^n u_n$. Položme $f(u) = x^1 v_1 + \dots + x^n v_n$. Cvičení: ověřte, že $f(u_i) = v_i$, f je lineární a je-li f' zobrazení s těmito vlastnostmi, potom $f' = f$. $\square$

Tvrzení 11.1.2. *Buďte $f: U \rightarrow V$ a $g: V \rightarrow W$ lineární zobrazení. Pak $g \circ f: U \rightarrow W$ je lineární zobrazení.*

Důkaz. Buďte U, V, W vektorové prostory nad polem P . Pro libovolná $u_1, u_2 \in U$ máme

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u_1 + u_2) &= g(f(u_1 + u_2)) = \\ &= g(f(u_1) + f(u_2)) = \\ &= g(f(u_1)) + g(f(u_2)) = \\ &= (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2).\end{aligned}$$

Pro libovolné $u \in U$ a $p \in P$ máme

$$\begin{aligned}(g \circ f)(pu) &= g(f(pu)) = \\ &= g(pf(u)) = \\ &= pg(f(u)) = \\ &= p(g \circ f)(u).\end{aligned}$$

 $\square$

11.2. Jádru a obraz

Definice 11.2.1. Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Množina

$$\text{Ker } f = \{u \in U \mid f(u) = 0\}$$

je *jádro* zobrazení f a množina

$$\text{Im } f = f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}$$

je *obraz* zobrazení f .

Tvrzení 11.2.1. *Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Pak*

- (1) *$\text{Ker } f$ je podprostor U ,*
- (2) *$\text{Im } f$ je podprostor V .*

Důkaz. (1) (i) $f(0) = 0$, takže $0 \in \text{Ker } f$. (ii) Pro $u_1, u_2 \in \text{Ker } f$ platí $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = 0 + 0 = 0$, takže $u_1 + u_2 \in \text{Ker } f$. (iii) Pro $u \in \text{Ker } f$ a $p \in P$ platí $f(pu) = pf(u) = p \cdot 0 = 0$, takže $pu \in \text{Ker } f$.

(2) (i) $f(0) = 0$, takže $0 \in \text{Im } f$. (ii) Pro $v_1, v_2 \in \text{Im } f$ existují $u_1, u_2 \in U$ takové, že $f(u_1) = v_1$ a $f(u_2) = v_2$. Potom $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2$, takže $v_1 + v_2 \in \text{Im } f$. (iii) Buďte $v \in \text{Im } f$ a $p \in P$. Potom existuje $u \in U$ takové, že $f(u) = v$, a $f(pu) = pf(u) = pv$, takže $pv \in \text{Im } f$. $\square$

Příklad. (1) Pro lineární zobrazení re z příkladu (9) platí:

$$\text{Im } \text{re} = \mathbb{R}, \quad \text{Ker } \text{re} = \mathbb{R}i = \{ri \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Při rovnoběžném promítání $p: E^3 \rightarrow E^2$ je podprostor $\text{Ker } p$ totožný se směrem promítání, kdežto $\text{Im } p = E^2$.

(3) Při otáčení $\phi_\alpha: E^2 \rightarrow E^2$ o úhel $\alpha \neq 2k\pi$ je $\text{Im } \phi_\alpha = E^2$, zatímco $\text{Ker } \phi_\alpha$ je nulový podprostor. $\square$

Tvrzení 11.2.2. *Lineární zobrazení f je injektivní právě tehdy, když $\text{Ker } f = \{0\}$.*

Důkaz. Buď f injektivní. Zřejmě $0 \in \text{Ker } f$. Je-li $u \in \text{Ker } f$, pak $f(u) = f(0) = 0$, a díky injektivitě $u = 0$. Čili $\text{Ker } f = \{0\}$.

Nechť $\text{Ker } f = \{0\}$. Je-li $f(u_1) = f(u_2)$, pak $f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2) = 0$, takže $u_1 - u_2 \in \text{Ker } f$, čili $u_1 - u_2 = 0$ a $u_1 = u_2$. $\square$

Cvičení. Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Potom f je injektivní právě tehdy, když pro každou lineárně nezávislou množinu $\{u_1, \dots, u_n\} \subset U$ je $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ lineárně nezávislá množina. $\square$

Tvrzení 11.2.3. *Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení, kde U je konečněrozměrný prostor. Potom f je injektivní právě tehdy, když existuje báze $(u_1, \dots, u_n)$ prostoru U taková, že $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ lineárně nezávislá množina.*

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Nechť f je injektivní. Jelikož U je konečněrozměrný, podle Tvrzení 9.3.1 má bázi, označme ji $(u_1, \dots, u_n)$. Jestliže

$$x^1 f(u_1) + \dots + x^n f(u_n) = 0,$$

potom díky linearitě f

$$f(x^1 u_1 + \dots + x^n u_n) = 0, \quad \text{tj.} \quad x^1 u_1 + \dots + x^n u_n \in \text{Ker } f.$$

Podle Tvrzení 11.2.2 $\text{Ker } f = \{0\}$, takže

$$x^1 u_1 + \dots + x^n u_n = 0.$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_n\}$ plyne $x^1 = \dots = x^n = 0$. Tedy, množina $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ je lineárně nezávislá.

„ $\Leftarrow$ “ Nechť U má bázi $(u_1, \dots, u_n)$ takovou, že $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ je lineárně nezávislá množina. Buďte

$$u = x^1 u_1 + \dots + x^n u_n, \quad v = y^1 u_1 + \dots + y^n u_n$$

takové, že

$$\sum_{i=1}^n x^i f(u_i) = f\left(\sum_{i=1}^n x^i u_i\right) = f(u) = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n y^i u_i\right) = \sum_{i=1}^n y^i f(u_i).$$

Potom

$$(x^1 - y^1)f(u_1) + \dots + (x^n - y^n)f(u_n) = 0$$

a z lineární nezávislosti množiny $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ plyne

$$x^1 - y^1 = \dots = x^n - y^n = 0 \quad \text{čili} \quad x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n \quad \text{a} \quad u = v.$$

Takže f je injektivní. $\square$

Tvrzení 11.2.4. *Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení, kde U je konečněrozměrný prostor. Potom f je surjektivní právě tehdy, když existuje báze $(u_1, \dots, u_n)$ prostoru U taková, že $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ generuje V .*

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Nechť f je surjektivní. Jelikož U je konečněrozměrný, podle Tvrzení 9.3.1 má bázi, označme ji $(u_1, \dots, u_n)$. Buď $v \in V$. Jelikož f je surjektivní, existuje

$$u = x^1 u_1 + \dots + x^n u_n \in U$$

takové, že

$$v = f(u) = f(x^1 u_1 + \cdots + x^n u_n) = x^1 f(u_1) + \cdots + x^n f(u_n).$$

Tedy, $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ generuje V .

„ $\Leftarrow$ “ Necht U má bázi $(u_1, \dots, u_n)$ takovou, že $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ generuje V . Buď buď $v \in V$. Potom

$$v = x^1 f(u_1) + \cdots + x^n f(u_n) = f(x^1 u_1 + \cdots + x^n u_n).$$

Tedy, f je surjektivní. $\square$

Cvičení. Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení, kde U je konečněrozměrný prostor. Potom f je surjektivní právě tehdy, když pro každou množinu generátorů $\{u_1, \dots, u_n\}$ prostoru U množina $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ generuje prostor V . $\square$

Jsou-li oba prostory U, V konečněrozměrné, pak číslo $\dim \operatorname{Ker} f$ se nazývá *defekt* a číslo $\dim \operatorname{Im} f$ *hodnota* lineárního zobrazení. Platí o nich následující tvrzení.

Tvrzení 11.2.5. *Budte U, V konečněrozměrné vektorové prostory a $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U.$$

Důkaz. Buď $(u_1, \dots, u_m)$ báze podprostoru $\operatorname{Ker} f$ a doplňme ji vektory $u_{m+1}, \dots, u_n$ do báze $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ prostoru U .

Potom množina $\{f(u_1), \dots, f(u_m), f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\}$ generuje $f(U) = \operatorname{Im} f$ (viz Tvrzení 11.2.4). Jelikož $f(u_1) = \cdots = f(u_m) = 0$, tak i množina $\{f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\}$ generuje $\operatorname{Im} f$.

Jestliže

$$x^{m+1} f(u_{m+1}) + \cdots + x^n f(u_n) = 0,$$

díky linearitě f tedy

$$f(x^{m+1} u_{m+1} + \cdots + x^n u_n) = 0, \quad \text{tj.} \quad x^{m+1} u_{m+1} + \cdots + x^n u_n \in \operatorname{Ker} f,$$

potom pro vhodné koeficienty $x^1, \dots, x^m$

$$x^{m+1} u_{m+1} + \cdots + x^n u_n = x^1 u_1 + \cdots + x^m u_m$$

tedy

$$x^1 u_1 + \cdots + x^m u_m - x^{m+1} u_{m+1} - \cdots - x^n u_n = 0.$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ vyplývá, že všechny koeficienty $x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n$ jsou nulové, takže množina $\{f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\}$ je lineárně nezávislá.

Tedy, $(f(u_{m+1}), \dots, f(u_n))$ je báze podprostoru $\operatorname{Im} f$, takže $\dim \operatorname{Im} f = n - m = \dim U - \dim \operatorname{Ker} f$. $\square$

11.3. Izomorfismy

Stejně jako u jiných algebraických struktur, bijektivní homomorfismy se nazývají izomorfismy.

Definice 11.3.1. *Izomorfismus* vektorových prostorů je bijektivní lineární zobrazení. Vektorové prostory U, V jsou *izomorfní*, existuje-li mezi nimi izomorfismus. Zapisujeme $U \cong V$.

Příklad. (1) Homotetie $f_c: a \mapsto ca$ z příkladu (3) je izomorfismus právě tehdy, když $c \neq 0$.

- (2) Homomorfismus $z \mapsto \bar{z}$ z příkladu (8) je izomorfismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$.
 (3) Homomorfismus re z příkladu (9) není izomorfismus (není injektivní).
 (4) Otáčení je izomorfismus.
 (5) Rovnoběžné promítání $E^3 \rightarrow E^2$ není izomorfismus. $\square$

Tvrzení 11.3.1. *Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení, kde U je konečněrozměrný prostor. Potom f je izomorfismus právě tehdy, když existuje báze $(u_1, \dots, u_n)$ prostoru U taková, že $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ je báze prostoru V .*

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Tvrzení 11.2.3 a 11.2.4. $\square$

Cvičení. Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení, kde U je konečněrozměrný prostor. Potom f je izomorfismus právě tehdy, když pro každou bázi $(u_1, \dots, u_n)$ prostoru U je $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ báze prostoru V . $\square$

Tvrzení 11.3.2. *Buď $f: U \rightarrow V$ izomorfismus. Pak $f^{-1}: V \rightarrow U$ je také izomorfismus.*

Důkaz. Zobrazení f je bijektivní, takže k němu existuje inverzní zobrazení f^{-1} , a to je také bijektivní. Zbývá dokázat, že je lineární. Buďte $v_1, v_2 \in V$. Díky bijektivnosti zobrazení f existují $u_1, u_2 \in U$ takové, že $f(u_1) = v_1$ a $f(u_2) = v_2$. Potom

$$\begin{aligned} f^{-1}(v_1 + v_2) &= f^{-1}(f(u_1) + f(u_2)) = \\ &= f^{-1}(f(u_1 + u_2)) = \\ &= u_1 + u_2 = \\ &= f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

Důkaz homogenity necháme jako cvičení. $\square$

Cvičení. Dokažte, že relace „být izomorfní“ je relace ekvivalence (reflexivní, symetrická, tranzitivní). $\square$

Izomorfní prostory se z hlediska lineární algebry liší jen v označení prvků a operací, není mezi nimi žádný rozdíl odhalitelný prostředky lineární algebry.

V konečněrozměrném případě je situace obzvlášť příjemná: každý prostor je izomorfní s některým prostorem P^n .

Tvrzení 11.3.3. *Každý konečněrozměrný vektorový prostor U nad polem P je izomorfní s prostorem $P^{\dim U}$.*

Důkaz. Zobrazení $U \rightarrow P^{\dim U}$, které vektorům přiřazuje jejich souřadnice vzhledem k pevně zvolené bázi, je izomorfismus (ověřte podrobně). $\square$

Počítání se souřadnicemi vektorů z U je tedy počítání v izomorfním prostoru $P^{\dim U}$. Na druhé straně, tento izomorfismus závisí na volbě báze, a to je důvod, proč není vhodné prostory U a $P^{\dim U}$ ztotožňovat.

Tvrzení 11.3.4. *Konečněrozměrné vektorové prostory nad stejným polem jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.*

Důkaz. Buď $f: U \rightarrow V$ izomorfismus (tedy, mimo jiné, injekce a surjekce). Potom $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ (viz Tvrzení 11.2.2) a $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$, a proto díky Tvrzení 11.2.5 $\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Jestliže $\dim U = \dim V$, pak $U \cong P^{\dim U} = P^{\dim V} \cong V$. $\square$

11.3.1. Přímé součty vektorových (pod)prostorů

Už známe přímý součet prostorů a přímý součet podprostorů. Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ podprostory vektorového prostoru U , pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 + \dots + U_n$ a $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. První z nich je podprostor prostoru U , kdežto druhý není. Nicméně, podle následujícího tvrzení tyto přímé součty jsou izomorfní.

Tvrzení 11.3.5. *Budte $U_1, \dots, U_n$ podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru U . Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

- (1) *součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý;*
- (2) *$U_1 + \dots + U_n \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_n$.*

Důkaz. Předpokládejme, že součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý. Bud' $p: U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow U_1 + \dots + U_n$, $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 + \dots + u_n$. Zobrazení p je lineární (cvičení). Jelikož součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý, každé $u \in U_1 + \dots + U_n$ lze zapsat právě jedním způsobem jako $u = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_i \in U_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Můžeme tedy definovat zobrazení $U_1 + \dots + U_n \rightarrow U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, $u \mapsto (u_1, \dots, u_n)$. Toto zobrazení je inverzní k p , tudíž p je bijekce, a tedy izomorfismus.

Předpokládejme, že $U_1 + \dots + U_n \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. Potom $\dim(U_1 + \dots + U_n) = \dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$ a podle Tvrzení 10.3.3 součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý. □

Cvičení. Dokažte, že zobrazení p z předchozího důkazu je lineární. □

Cvičení. Pro každé $i = 1, \dots, n$ zobrazení $\pi_i: U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow U_i$ zadané předpisem $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_i$ se nazývá i -tá projekce.

Pro každé $i = 1, \dots, n$ zobrazení $\iota_i: U_i \rightarrow U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ zadané předpisem $u \mapsto (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$, kde u stojí na i -tém místě, se nazývá vložení i -tého sčítance.

Ukažte, že projekce π_i a vložení ι_i jsou lineární zobrazení. Spočtete $\pi_i \circ \iota_j$. □