

13. přednáška, 12. 5. 2026

Definice 16.0.2. Buď V konečněrozměrný vektorový prostor s bází $(e_1, \dots, e_n)$, buď f p -lineární forma na V . Čísla $f_{i_1 \dots i_p} := f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ jsou *složky* formy f vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Příklad. Složky bilineární formy f jsou právě prvky její matice: $B_j^i = f(e_i, e_j)$. $\square$

Cvičení. Složky n -formy ϵ zadané determinantem jsou (ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^n$)

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} \text{sgn}(i_1, \dots, i_n) & \text{jsou-li } i_1, \dots, i_n \text{ po dvou různá čísla,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad \square$$

Tvrzení 16.0.1. Buďte V konečněrozměrný vektorový prostor, $(e_1, \dots, e_n)$ jeho báze, f p -lineární forma na V , $u_1, \dots, u_p \in V$ a $(x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, (x_p^1, \dots, x_p^n)$ jejich souřadnice vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Pak platí

$$f(u_1, \dots, u_p) = f_{i_1 \dots i_p} x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}. \quad (16)$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_p) &= f(x_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, x_p^{i_p} e_{i_p}) = x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \\ &= f_{i_1 \dots i_p} x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} \end{aligned} \quad \square$$

Při změně báze $(e_1, \dots, e_n)$ se mění i složky $f_{i_1 \dots i_p}$.

Tvrzení 16.0.2. Buď Q matice přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(e'_1, \dots, e'_n)$. Složky p -lineární formy f vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$ buďte $f_{i_1 \dots i_p}$, složky téže formy vzhledem k bázi $(e'_1, \dots, e'_n)$ buďte $f'_{i_1 \dots i_p}$. Pak platí

$$f'_{i_1 \dots i_p} = Q_{i_1}^{j_1} \cdots Q_{i_p}^{j_p} f_{j_1 \dots j_p}. \quad (17)$$

Důkaz. Cvičení. $\square$

Ve fyzice se obvykle zavádí kovariantní tenzorové pole jako soubor n^p funkcí $f_{i_1 \dots i_p}$, jež se při změně báze transformují podle formule (17). Takový soubor funkcí určuje p -lineární zobrazení vztahem (16).

Množinu všech p -lineárních forem na vektorovém prostoru V označujeme $T_p V$. Zavedme algebraické operace s p -lineárními formami.

Definice 16.0.3. Buďte f a g p -lineární formy a $a \in \mathbb{R}$. *Součet* forem f a g je zobrazení $f + g: V^p \rightarrow \mathbb{R}$ zadané předpisem

$$(f + g)(u_1, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_p) + g(u_1, \dots, u_p),$$

a -*násobek* formy f je zobrazení $af: V^p \rightarrow \mathbb{R}$ zadané předpisem

$$(af)(u_1, \dots, u_p) = af(u_1, \dots, u_p).$$

Snadno se ověří (cvičení), že $f + g$ a af jsou zase p -lineární formy. Dokonce jsou splněny axiomy vektorového prostoru:

Důsledek. Množina $T_p V$ všech p -lineárních forem na prostoru V je vektorový prostor vzhledem ke sčítání forem a násobení skalárem.

Definice 16.0.4. Tenzorový součin forem $f \in T_p V$ a $g \in T_q V$ je zobrazení $f \otimes g: V^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}$ zadané předpisem

$$(f \otimes g)(u_1, \dots, u_{p+q}) = f(u_1, \dots, u_p) \cdot g(u_{p+1}, \dots, u_{p+q}).$$

Snadno se ověří (cvičení), že tenzorový součin p -lineární formy a q -lineární formy je $(p+q)$ -lineární forma.

Tvrzení 16.0.3. *Nechť $f \in T_p V$, $g \in T_q V$, $h \in T_r V$, $a \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

- (1) $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$;
- (2) $(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$;
- (3) $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h$;
- (4) $(af) \otimes h = a(f \otimes h) = f \otimes (ah)$.

Důkaz. Cvičení. □

Obecně však tenzorový součin není komutativní: $f \otimes g \neq g \otimes f$.

Cvičení. Dokažte formule pro složky:

$$\begin{aligned}(f + g)_{i_1 \dots i_p} &= f_{i_1 \dots i_p} + g_{i_1 \dots i_p}, \\ (f \otimes g)_{i_1 \dots i_{p+q}} &= f_{i_1 \dots i_p} \cdot g_{i_{p+1} \dots i_{p+q}}.\end{aligned}$$
□

Prostor $T_1 V$ se alternativně označuje V^* a nazývá se *duální* prostor k prostoru V . Ukážeme, že s každou bází prostoru V je spojena jistá báze prostoru V^* .

Buď $(e_1, \dots, e_n)$ nějaká báze prostoru V . Souřadnice vektoru $x \in V$ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$ označme $(x^1, \dots, x^n)$ (pak platí $x = x^j e_j$). Pro $1 \leq i \leq n$ zavedme zobrazení $e^i: V \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $x \mapsto x^i$. To jest,

$$e^i(x^j e_j) = x^i.$$

Zobrazení e^i jsou lineární (cvičení), a proto $e^i \in V^*$. Máme

$$e^i(e_j) = \delta_j^i,$$

kde δ_j^i je známé Kroneckerovo delta:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tvrzení 16.0.4. *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze prostoru V , buď $f \in V^*$ libovolná 1-forma se složkami $f_i = f(e_i)$. Pak*

$$f = f_i e^i.$$

Důkaz. Podle formule (16) je $f(x) = f(x^i e_i) = x^i f_i = f_i e^i(x) = (f_i e^i)(x)$. □

Tvrzení 16.0.5. *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze prostoru V . Pak formy $e^1, \dots, e^n$ tvoří bázi prostoru V^* .*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení každá 1-forma f je lineární kombinací 1-form e^i (koeficienty jsou složky f_i). Tedy, formy e^i generují V^* .

Zároveň množina $\{e^1, \dots, e^n\}$ je lineárně nezávislá: Necht' $c_i e^i = 0$ pro nějaké koeficienty $c_i \in \mathbb{R}$. Dosazením e_j obdržíme $0 = c_i e^i(e_j) = c_j$. □

Báze $(e^1, \dots, e^n)$ se nazývá *duální* k bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Důsledek. *Je-li prostor V konečněrozměrný, pak $\dim V^* = \dim V$.*

Podobně najdeme báze v prostorech $T_p V$.

Tvrzení 16.0.6. *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze prostoru V , buď $f \in T_p V$ libovolná p -forma se složkami $f_{i_1 \dots i_p} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$. Pak*

$$f = f_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}.$$

Důkaz. Podle formule (16) je opět

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_p) &= f(x_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, x_p^{i_p} e_{i_p}) = x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} f_{i_1 \dots i_p} = \\ &= f_{i_1 \dots i_p} e^{i_1}(x_1) \cdots e^{i_p}(x_p) = \\ &= (f_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p})(x_1, \dots, x_p). \end{aligned} \quad \square$$

Tvrzení 16.0.7. *Bud' $(e_1, \dots, e_n)$ báze prostoru V . Pak formy $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}$ tvoří bázi prostoru $T_p V$.*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení každá p -forma f je lineární kombinací p -forem $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}$ (koeficienty jsou složky $f_{i_1 \dots i_p}$). Tudíž, formy $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}$ generují $T_p V$.

Zároveň jsou nezávislé: Necht' $c_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} = 0$ pro nějaké koeficienty $c_{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{R}$. Dosazením $e_{j_1}, \dots, e_{j_p}$ obdržíme $0 = c_{i_1 \dots i_p} e^{i_1}(e_{j_1}) \cdots e^{i_p}(e_{j_p}) = c_{j_1 \dots j_p}$. $\square$

Důsledek. *Je-li prostor V konečněrozměrný, pak $\dim T_p V = (\dim V)^p$.*
