

Počet nenulových prvků diagonální matice symetrické bilineární formy nezávisí na volbě báze příslušného prostoru. Dokonce, v případě vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$ a symetrické bilineární formy na něm počet jedniček a minus jedniček v její matici, která je diagonální, nezávisí na volbě báze.

Tvrzení 15.5.4 (Sylvesterův zákon setrvačnosti). *Počet jedniček a minus jedniček v matici symetrické bilineární formy na konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru nezávisí na volbě báze.*

Důkaz. Buď β symetrická bilineární forma na konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru V . Buďte $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ báze prostoru V takové, že matice formy β vzhledem k těmto bázím, označme je $B_{\mathbf{u}}$ a $B_{\mathbf{v}}$, jsou v kanonickém tvaru. Bez ztráty obecnosti pro jednoduchost předpokládejme, že matice $B_{\mathbf{u}}$ je diagonální matice, která má na diagonále nejdříve k_1 jedniček, potom l_1 minus jedniček a ostatní prvky nulové, a matice $B_{\mathbf{v}}$ je diagonální matice, která má na diagonále nejdříve k_2 jedniček, potom l_2 minus jedniček a ostatní prvky nulové. Čili,

$$B_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} E_{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} E_{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E_i je jednotková matice typu $i \times i$.

Předpokládejme, že $k_1 > k_2$. Označme $U_1 = \llbracket u_1, \dots, u_{k_1} \rrbracket$ a $U_2 = \llbracket v_{k_2+1}, \dots, v_n \rrbracket$. Potom

$$\begin{aligned} \dim(U_1 \cap U_2) &= \\ &= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) \geq \quad (\dim(U_1 + U_2) \leq n) \\ &\geq k_1 + (n - k_2) - n > 0, \end{aligned}$$

takže existuje nenulový vektor $v \in U_1 \cap U_2$. Označme x a y souřadnice vektoru v vzhledem k bázím $\mathbf{u}$, resp. $\mathbf{v}$. Jelikož $v \in U_1$ a zároveň $v \in U_2$,

$$x = (x^1, \dots, x^{k_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k_1}) \quad \text{a} \quad y = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k_2}, y^{k_2+1}, \dots, y^n).$$

Jelikož v je nenulový vektor, aspoň jedna souřadnice $x^1, \dots, x^{k_1}$ je nenulová a zároveň aspoň jedna souřadnice $y^{k_2+1}, \dots, y^n$ je nenulová. Takže,

$$\beta(v, v) = \bar{\beta}(v) = x^T B_{\mathbf{u}} x = (x^1)^2 + \dots + (x^{k_1})^2 > 0$$

a zároveň

$$\beta(v, v) = \bar{\beta}(v) = y^T B_{\mathbf{v}} y = -(y^{k_2+1})^2 - \dots - (y^{k_2+l_2})^2 \leq 0,$$

což je spor. Obdobně bychom došli ke sporu s předpokladem, že $k_2 > k_1$. Proto $k_1 = k_2$ a v důsledku toho také $l_1 = l_2$.

Jiný důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [Marvan, 17. Bilineární a kvadratické formy]. $\square$

15.6. Pozitivní definitnost

Definice 15.6.1. Symetrická bilineární forma β na reálném vektorovém prostoru V je *pozitivně definitní*, jestliže $\beta(v, v) = \bar{\beta}(v) > 0$ pro každý nenulový vektor $v \in V$.

Tvrzení 15.6.1. *Symetrická bilineární forma na konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru je pozitivně definitní právě tehdy, když její matice vzhledem k nějaké bázi je jednotková.*

Důkaz. Buď β symetrická bilineární forma na konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru V . Podle Tvzení 15.5.3 existuje báze $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ prostoru V taková, že matice B formy β vzhledem k této bázi je v kanonickém tvaru, čili B je diagonální matice s $d_1, \dots, d_n \in \{0, 1, -1\}$ na diagonále. Pro každé $v \in V$ tedy $\beta(v, v) = \beta(v) = x^T Bx = d_1(x^1)^2 + \dots + d_n(x^n)^2$, kde $x = (x^1, \dots, x^n)$ jsou souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $\mathbf{v}$.

Předpokládejme, že β je pozitivní definitní, tedy $\beta(v, v) > 0$ pro každé nenulové $v \in V$. Potom pro každé i $\beta(v_i, v_i) = e_i^T B e_i = d_i > 0$, takže každé $d_i = 1$ a B je jednotková matice.

Je-li B jednotková matice, potom pro každý nenulový vektor $v \in V$ $\beta(v, v) = x^T E x = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 > 0$, čili β je pozitivně definitní. $\square$

Definice 15.6.2. Symetrická reálná matice A typu $n \times n$ je *pozitivně definitní*, jestliže $x^T A x > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$.

Tvrzení 15.6.2. Symetrická bilineární forma na konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru je pozitivně definitní právě tehdy, když její matice vzhledem k libovolné bázi je pozitivně definitní.

Důkaz. Buď β symetrická bilineární forma na konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru V , $\mathbf{v}$ libovolná báze V a B je matice formy β vzhledem k bázi $\mathbf{v}$.

Předpokládejme, že pro každé $v \in V \setminus \{0\}$ $\beta(v, v) > 0$. Pro libovolné nenulové $x \in \mathbb{R}^n$ buď v vektor z V , jehož souřadnice vzhledem k bázi $\mathbf{v}$ jsou x . Potom $x^T B x = \beta(v, v) > 0$.

Předpokládejme, že pro každé nenulové $x \in \mathbb{R}^n$ $x^T B x > 0$. Pro libovolné nenulové $v \in V$ nechť x jsou jeho souřadnice vzhledem k bázi $\mathbf{v}$. Potom $\beta(v, v) = x^T B x > 0$. $\square$

Důsledek. Symetrická reálná matice je pozitivně definitní právě tehdy, když je kongruentní s jednotkovou maticí.

Důkaz. Důsledek Tvzení 15.6.1 a 15.6.2. $\square$

Definice 15.6.3. Buď A matice typu $n \times n$. Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ determinant matice typu $i \times i$ vzniklé z A vynecháním posledních $n - i$ řádků a posledních $n - i$ sloupků je *hlavní minor*.

Tvrzení 15.6.3. Symetrická reálná matice je pozitivně definitní právě tehdy, když všechny její hlavní minory jsou kladné.

Důkaz. Buď B symetrická reálná matice typu $n \times n$. Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ označme B_i matici typu $i \times i$, která z matice B vznikne vynecháním posledních $n - i$ řádků a posledních $n - i$ sloupků (např. $B_n = B$), a označme $D_i = \det B_i$.

Předpokládejme, že B je pozitivně definitní. Podle předchozího Důsledku B je kongruentní s jednotkovou maticí, čili existuje regulární matice Q taková, že $B = Q^T E Q = Q^T Q$. Proto $\det B = \det(Q^T Q) = (\det Q)^2 > 0$.

Buď $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Pro libovolné nenulové $y = (y^1, \dots, y^i) \in \mathbb{R}^i$ označme $y_0 = (y^1, \dots, y^i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Potom $y^T B_i y = y_0^T B y_0 > 0$, čili B_i je pozitivně definitní a podle předchozího odstavce $\det B_i > 0$.

Předpokládejme, že všechny hlavní minory matice B jsou kladné, čili $D_i > 0$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Převeďme B na kanonický tvar pomocí dvojic symetrických elementárních úprav, jak je popsáno v důkazech Tvzení 15.5.1 a 15.5.2. Protože $B_1^1 = D_1 > 0$, při čítání vhodných násobků prvního řádku k ostatním řádkům a vhodných násobků prvního sloupku k ostatním sloupkům vynulujeme všechny prvky prvního sloupku a všechny prvky prvního řádku kromě B_1^1 . Vzniklou matici označme $\bar{B}$. Provedené úpravy nemění

hodnotu determinantu, proto hlavní minory matice $\bar{B}$ jsou také rovny $D_1, \dots, D_n$. Čili $B_1^1 \bar{B}_2^2 = D_2 > 0$, takže $\bar{B}_2^2 > 0$ a přičítáním vhodných násobků druhého řádku k ostatním řádkům a vhodných násobků druhého sloupku k ostatním sloupkům vynulujeme všechny prvky druhého sloupku a všechny prvky druhého řádku kromě $\bar{B}_2^2$. Vzniklou matici označme $\bar{\bar{B}}$ a její hlavní minory jsou také rovny $D_1, \dots, D_n$. Čili $D_2 \bar{\bar{B}}_3^3 = D_3 > 0$, takže $\bar{\bar{B}}_3^3 > 0$ a takto můžeme pokračovat, až dostaneme diagonální matici s kladnými prvky na diagonále. Převodem na kanonický tvar dostaneme jednotkovou matici. Matice B je tedy kongruentní s jednotkovou maticí a podle předchozího Důsledku je tedy pozitivně definitní. $\square$

16. TENZORY

Zobecněním bilineární formy jsou multilineární formy. Nazývají se též kovariantní tenzory. Hojně se vyskytují ve fyzice spolu s tenzory kontravariantními a smíšenými. Omezíme se na reálný případ. Používáme Einsteinovu sumační konvenci.

Definice 16.0.1. Buď V vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$. Buď p přirozené číslo, označme $V^p = V \times \cdots \times V$ (p -krát). Zobrazení $f: V^p \rightarrow \mathbb{R}$, splňující pro libovolné vektory $u_i, u'_i, u''_i \in V$, libovolný skalár $a \in \mathbb{R}$ a každý index $i = 1, \dots, p$ podmínky

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_{i-1}, u'_i + u''_i, u_{i+1}, \dots, u_p) &= \\ &= f(u_1, \dots, u_{i-1}, u'_i, u_{i+1}, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_{i-1}, u''_i, u_{i+1}, \dots, u_p), \\ f(u_1, \dots, u_{i-1}, au_i, u_{i+1}, \dots, u_p) &= af(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_p) \end{aligned}$$

(linearita v i -tém argumentu), je p -lineární forma nebo též kovariantní tenzor řádu p na V .

1-lineární forma je lineární zobrazení $V \rightarrow \mathbb{R}$, 2-lineární forma je bilineární forma.

Příklad. Necht' $V = \mathbb{R}^n$. Pro vektory $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, x_n = (x_n^1, \dots, x_n^n) \in \mathbb{R}^n$ položíme

$$\epsilon(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Z vlastností determinantu vyplývá, že ϵ je n -linerární forma na $\mathbb{R}^n$ (cvičení). $\square$