

15.3. Symetrické a antisymetrické bilineární formy

Definice 15.3.1. Bilineární forma β na vektorovém prostoru V je

- *symetrická*, jestliže $\beta(u, v) = \beta(v, u)$ pro libovolné $u, v \in V$,
- *antisymetrická*, jestliže $\beta(u, v) = -\beta(v, u)$ pro libovolné $u, v \in V$.

Příklad. (1) Eukleidovský skalární součin je symetrická bilineární forma.

(2) Zobrazení $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\beta \left(\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{pmatrix}$$

je antisymetrická bilineární forma na $\mathbb{R}^2$. □

Tvrzení 15.3.1. Buď β bilineární forma na konečněrozměrném vektorovém prostoru. Potom

- (1) β je symetrická právě tehdy, když její matice vzhledem k libovolné bázi je symetrická,
- (2) β je antisymetrická právě tehdy, když její matice vzhledem k libovolné bázi je antisymetrická.

Důkaz. Buď V n -rozměrný vektorový prostor nad P , $(v_1, \dots, v_n)$ jeho báze, β bilineární forma na V a B matice formy β vzhledem k bázi $(v_1, \dots, v_n)$.

- (1) Je-li β symetrická, pak $B_j^i = \beta(v_i, v_j) = \beta(v_j, v_i) = B_i^j$, takže B je symetrická. Je-li B symetrická, pak pro libovolné $u, v \in V$ a jejich souřadnice x , resp. y platí

$$\begin{aligned} \beta(u, v) &= x^T B y = & (B = B^T) \\ &= x^T B^T y = & (x^T B^T y \text{ je matice typu } 1 \times 1) \\ &= (x^T B^T y)^T = \\ &= y^T B x = \\ &= \beta(v, u), \end{aligned}$$

takže β je symetrická.

- (2) Druhou část tvrzení lze dokázat obdobně. □

Tvrzení 15.3.2. Buď V vektorový prostor nad P a β bilineární forma na V . Potom existuje právě jedna symetrická bilineární forma β_s a právě jedna antisymetrická bilineární forma β_a takové, že $\beta = \beta_s + \beta_a$. A to sice

$$\beta_s(u, v) = \frac{1}{2}(\beta(u, v) + \beta(v, u)) \quad a \quad \beta_a(u, v) = \frac{1}{2}(\beta(u, v) - \beta(v, u)).$$

Důkaz. Bilineární forma β_s definovaná vztahem

$$\beta_s(u, v) = \frac{1}{2}(\beta(u, v) + \beta(v, u))$$

je symetrická (cvičení), bilineární forma β_a definovaná vztahem

$$\beta_a(u, v) = \frac{1}{2}(\beta(u, v) - \beta(v, u))$$

je antisymetrická (cvičení) a

$$\beta(u, v) = \beta_s(u, v) + \beta_a(u, v).$$

Buďte γ_s symetrická bilineární forma a γ_a antisymetrická bilineární forma takové, že $\beta = \gamma_s + \gamma_a$. Potom pro libovolné $u, v \in V$

$$\beta(u, v) = \gamma_s(u, v) + \gamma_a(u, v)$$

$$\beta(v, u) = \gamma_s(v, u) + \gamma_a(v, u) = \gamma_s(u, v) - \gamma_a(u, v).$$

Součtem těchto dvou rovnic dostaneme

$$\gamma_s(u, v) = \frac{1}{2}(\beta(u, v) + \beta(v, u)) = \beta_s(u, v),$$

odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$\gamma_a(u, v) = \frac{1}{2}(\beta(u, v) - \beta(v, u)) = \beta_a(u, v). \quad \square$$

Poznámka. Množina všech bilineárních forem na vektorovém prostoru s operacemi sčítání forem a násobení formy skalárem tvoří vektorový prostor. Množina všech symetrických bilineárních forem a množina všech antisymetrických bilineárních forem jsou podprostory prostoru. Podle předchozího tvrzení prostor všech bilineárních forem na jednom prostoru je přímým součtem těchto dvou podprostorů.

15.4. Kvadratické formy

V geometrii i fyzice se často vyskytují kvadratické formy. Mezi nimi a symetrickými bilineárními formami je jednojednoznačná korespondence.

Definice 15.4.1. Buď $\beta: V \times V \rightarrow P$ bilineární forma. Zobrazení $\bar{\beta}: V \rightarrow P$, $\bar{\beta}(v) = \beta(v, v)$, je *kvadratická forma* příslušná bilineární formě β .

Příklad. Pro eukleidovský skalární součin příslušná kvadratická forma je zobrazení, které každému vektoru u z příslušného vektorového prostoru přiřadí $(u, u) = \|u\|^2$. $\square$

Kvadratická forma je dána symetrickou částí bilineární formy.

Lemma 15.4.1. Buď β bilineární forma. Potom β_s je jediná symetrická bilineární forma taková, že $\bar{\beta} = \bar{\beta}_s$. Navíc,

$$\beta_s(u, v) = \frac{1}{2}(\bar{\beta}(u + v) - \bar{\beta}(u) - \bar{\beta}(v)).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(v) &= \beta(v, v) = \beta_s(v, v) + \beta_a(v, v) = & (\beta_a(v, v) = 0) \\ &= \beta_s(v, v) = \bar{\beta}_s(v). \end{aligned}$$

Buď γ symetrická bilineární forma taková, že $\bar{\beta} = \bar{\gamma}$. Potom

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(u + v) &= \gamma(u + v, u + v) = \gamma(u, u) + 2\gamma(u, v) + \gamma(v, v) = \\ &= \bar{\gamma}(u) + 2\gamma(u, v) + \bar{\gamma}(v). \end{aligned}$$

Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} \gamma(u, v) &= \frac{1}{2}(\bar{\gamma}(u + v) - \bar{\gamma}(u) - \bar{\gamma}(v)) = \frac{1}{2}(\bar{\beta}(u + v) - \bar{\beta}(u) - \bar{\beta}(v)) = \\ &= \frac{1}{2}(\beta_s(u + v, u + v) - \beta_s(u, u) - \beta_s(v, v)) = \\ &= \frac{1}{2}(\beta_s(u, u) + \beta_s(u, v) + \beta_s(v, u) + \beta_s(v, v) - \beta_s(u, u) - \beta_s(v, v)) = \\ &= \frac{1}{2}2\beta_s(u, v) = \beta_s(u, v). \end{aligned} \quad \square$$

Definice 15.4.2. Buď β bilineární forma. Bilineární forma β_s je *polarizace* kvadratické formy $\bar{\beta}$.

Tvrzení 15.4.2. *Budte β, γ bilineární formy. Potom $\bar{\beta} = \bar{\gamma}$ právě tehdy, když $\beta_s = \gamma_s$.*

Důkaz. Vyplývá z Lemmatu 15.4.1. □

Příklad. Mějme kvadratickou formu $\bar{\beta}$ na $\mathbb{R}^2$

$$\bar{\beta}(x^1, x^2) = a(x^1)^2 + bx^1x^2 + c(x^2)^2.$$

Potom

$$\beta_s((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = ax^1y^1 + \frac{1}{2}bx^1y^2 + \frac{1}{2}by^1x^2 + cx^2y^2. \quad \square$$

15.5. Kanonické tvary

Tvrzení 15.5.1. *Každá symetrická matice nad P je kongruentní s diagonální maticí.*

Důkaz. Buď A symetrická matice typu $n \times n$. Jelikož případ nulové matice je zřejmý, předpokládejme, že A je nenulová. Převedeme ji na diagonální matici v n krocích, v i -tém kroku vynulujeme prvky v i -tém řádku a i -tém sloupku mimo diagonálu, a to pomocí konečně mnoha dvojic úprav, přičemž každá dvojice úprav sestává z elementární řádkové úpravy a stejné elementární sloupkové úpravy. Pro jednoduchost budeme matici po provedení dvojice úprav označovat také A . i -tý krok vypadá následovně.

1. Je-li i -tý sloupek nulový (a tedy i i -tý řádek nulový), v i -tém kroku neděláme nic.
2. Jestliže $A_i^i = 0$, přičteme c -násobek j -tého řádku k i -tému řádku a pak přičteme c -násobek j -tého sloupku k i -tému sloupku, kde $j > i$ je takové, že $A_i^j \neq 0$, a c volíme takové, že $c \neq 0$ a $2A_i^j + cA_j^j \neq 0$. Potom $A_i^i = c(2A_i^j + cA_j^j) \neq 0$.
3. Pro každé $j \neq i$ takové, že $A_i^j \neq 0$, přičteme $(-A_i^j/A_i^i)$ -násobek i -tého řádku k j -tému řádku a pak přičteme $(-A_j^i/A_i^i)$ -násobek i -tého sloupku k j -tému sloupku. Potom $A_j^i = 0$ pro každé $j \neq i$.

Po i -tém kroku máme blokově diagonální matici

$$\begin{pmatrix} D_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix},$$

kde D_i je diagonální matice typu $i \times i$ s prvky $d_1, \dots, d_i$ na diagonále.

Provedením k dvojic úprav (vždy řádková a stejná sloupková úprava) dostaneme matici

$$B_k = P_k \cdots P_1 A P_1^T \cdots P_k^T = P_k \cdots P_1 A (P_k \cdots P_1)^T,$$

kde $P_1, \dots, P_k$ jsou vhodné elementární matice. Matice B_k je tedy symetrická matice kongruentní s maticí A (viz Tvrzení 15.2.5 a 15.2.6).

Po n -tém kroku máme diagonální matici D s prvky $d_1, \dots, d_n$ na diagonále, přičemž

$$D = P_m \cdots P_1 A P_1^T \cdots P_m^T = P_m \cdots P_1 A (P_m \cdots P_1)^T,$$

kde $P_1, \dots, P_m$ jsou vhodné elementární matice. Označíme-li $Q = (P_m \cdots P_1)^T$, potom $D = Q^T A Q$ a matici Q můžeme získat tak, že začneme s jednotkovou maticí a provádíme jen uvedené sloupkové úpravy. □

Tvrzení 15.5.2. *Buď A symetrická matice nad P .*

- (1) *Jestliže $P = \mathbb{R}$, potom A je kongruentní s diagonální maticí D takovou, že $D_i^i \in \{0, 1, -1\}$ pro každé i .*
- (2) *Jestliže $P = \mathbb{C}$, potom A je kongruentní s diagonální maticí D takovou, že $D_i^i \in \{0, 1\}$ pro každé i .*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení A je kongruentní s diagonální maticí, která má na diagonále prvky $d_1, \dots, d_n$.

- (1) Pro každé i takové, že $d_i \neq 0$, provedeme dvojici úprav: i -tý řádek vynásobíme $1/\sqrt{|d_i|}$ a i -tý sloupek vynásobíme $1/\sqrt{|d_i|}$. Na místě (i, i) potom bude $d_i/|d_i| = \pm 1$, takže na diagonále budou jen prvky množiny $\{0, 1, -1\}$.
- (2) Pro každé i takové, že $d_i \neq 0$, provedeme dvojici úprav: i -tý řádek vynásobíme z_i a i -tý sloupek vynásobíme z_i , tedy na místě (i, i) potom bude $d_i z_i^2$, takže $z_i \in \mathbb{C}$ volíme takové, aby $d_i z_i^2 = 1$. Na diagonále pak budou jen prvky množiny $\{0, 1\}$. $\square$

Definice 15.5.1. Buď A symetrická matice nad P . Diagonální matice D kongruentní s maticí A taková, že $D_i^i \in \{0, 1, -1\}$ (resp. $D_i^i \in \{0, 1\}$) pro každé i , je *kanonický tvar symetrické matice A vzhledem ke kongruentnosti*.

Poznámka. Počet nenulových prvků v diagonální matici je roven počtu jejích nenulových řádků, tedy její hodnoti. Hodnota matice se nemění elementárními úpravami, tedy ani násobením regulární maticí, takže kongruentní matice mají stejnou hodnotu a počty nenulových prvků v kongruentních diagonálních maticích jsou stejné.

Takže diagonální matice D z důkazu Tvrzení 15.5.1 sice není určena jednoznačně, ale všechny diagonální matice kongruentní s maticí A , včetně všech jejích kanonických tvarů, mají stejný počet nenulových prvků na diagonále.

Tvrzení 15.5.3. Pro každou symetrickou bilineární formu na konečněrozměrném vektorovém prostoru nad P existuje báze tohoto prostoru taková, že matice dané bilineární formy vzhledem k této bázi je v kanonickém tvaru.

Důkaz. Důsledek Tvrzení 15.5.1 a 15.5.2. $\square$