

14.11.2. Ortogonální a unitární matice

Definice 14.11.2. Čtvercová matice A nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) typu $n \times n$ je *ortogonální* (resp. *unitární*), jestliže $(Au, Av) = (u, v)$ pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), kde $(\cdot, \cdot)$ je standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Připomeňme značení: Pro matici $A = (A_j^i)$ označujeme $\overline{A} = (\overline{A_j^i})$.

Tvrzení 14.11.5. Buď A čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) typu $n \times n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) A je ortogonální (resp. unitární);
- (2) množina sloupků matice A je ortonormální v $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) se standardním skalárním součinem;
- (3) $A^T A = E$ (resp. $\overline{A}^T A = E$);
- (4) $AA^T = E$ (resp. $A\overline{A}^T = E$);
- (5) množina řádků matice A je ortonormální v $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) se standardním skalárním součinem;
- (6) A^T je ortogonální (resp. unitární).

Důkaz. Jen pro reálný případ.

(1) $\Rightarrow$ (2) Buď $(e_1, \dots, e_n)$ kanonická báze $\mathbb{R}^n$. Potom $Ae_i = A_i^\circ$ je i -tý sloupek matice A a platí

$$(A_i^\circ, A_j^\circ) = (Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j) = \delta_i^j,$$

takže množina sloupků matice A je ortonormální.

(2) $\Leftrightarrow$ (3)

$$(A^T A)_j^i = \sum_{k=1}^n (A^T)_k^i A_j^k = \sum_{k=1}^n A_i^k A_j^k = (A_i^\circ, A_j^\circ).$$

(3) $\Rightarrow$ (1) Jestliže $A^T A = E$, potom pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$(Au, Av) = (Au)^T (Av) = u^T A^T Av = u^T E v = u^T v = (u, v).$$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Jestliže $A^T A = E$, potom $A^T = A^{-1}$ a $AA^T = AA^{-1} = E$. Obdobně druhá implikace.

(4) $\Leftrightarrow$ (5)

$$(AA^T)_j^i = \sum_{k=1}^n A_k^i (A^T)_j^k = \sum_{k=1}^n A_k^i A_k^j = (A_i^\circ, A_j^\circ).$$

(4) $\Rightarrow$ (6) Jestliže $AA^T = E$, potom pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$(A^T u, A^T v) = (A^T u)^T (A^T v) = u^T AA^T v = u^T E v = u^T v = (u, v).$$

(6) $\Rightarrow$ (5) Buď $(e_1, \dots, e_n)$ kanonická báze $\mathbb{R}^n$. Potom $A^T e_i = (A^T)_i^\circ = A_i^\circ$ je i -tý řádek matice A a platí

$$(A_i^\circ, A_j^\circ) = (A^T e_i, A^T e_j) = (e_i, e_j) = \delta_i^j,$$

takže množina řádků matice A je ortonormální. □

Důsledek. Je-li A ortogonální (resp. unitární) matice, pak je regulární a $A^{-1} = A^T$ (resp. $A^{-1} = \overline{A}^T$).

Důkaz. Je-li A ortogonální (resp. unitární) matice, pak podle Tvzení 14.11.5 $A^T A = E$ (resp. $\overline{A}^T A = E$), takže $A^T = A^{-1}$ (resp. $\overline{A}^T = A^{-1}$). $\square$

Tvrzení 14.11.6. *Je-li A ortogonální (resp. unitární) matice, pak $\det A = \pm 1$ (resp. $|\det A| = 1$).*

Důkaz.

$$1 = \det E = \det(\overline{A}^T A) = \det \overline{A}^T \det A = \overline{\det A} \det A = |\det A|^2$$

Je-li $\det A \in \mathbb{R}$, potom $\det A = \pm 1$. $\square$

Cvičení. Dokažte, že $\det \overline{A}^T = \overline{\det A}$. $\square$

Tvrzení 14.11.7. *Součin ortogonálních (resp. unitárních) matic je ortogonální (resp. unitární) matice.*

Důkaz. Buďte A, B ortogonální (resp. unitární) matice, čili $A^T A = E$ a $B^T B = E$ (resp. $\overline{A}^T A = E$ a $\overline{B}^T B = E$). Potom

$$(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = E \quad (\text{resp. } \overline{AB}^T AB = \overline{B}^T \overline{A}^T AB = \overline{B}^T B = E). \square$$

14.11.3. Ortogonální transformace a ortogonální matice

Tvrzení 14.11.8. *Buď f lineární transformace konečněrozměrného prostoru se skalárním součinem a A její matice vzhledem k ortonormální bázi. Pak f je shodnost právě tehdy, když matice A je ortogonální.*

Důkaz. Buď V prostor se skalárním součinem, $(e_1, \dots, e_n)$ jeho ortonormální báze. Sloupky A_i^o matice A jsou souřadnice vektorů $f(e_i)$ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$, čili

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^n A_i^k e_k.$$

Podle Tvzení 14.11.2 f je shodnost právě tehdy, když $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ je ortonormální báze, a to je právě tehdy, když pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$(f(e_i), f(e_j)) = \delta_i^j, \text{ kde } \delta_j^i \text{ je Kroneckerovo delta.}$$

Ale

$$\begin{aligned} (f(e_i), f(e_j)) &= \left(\sum_{k=1}^n A_i^k e_k, \sum_{l=1}^n A_j^l e_l \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_i^k \overline{A_j^l} (e_k, e_l) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_i^k \overline{A_j^l} \delta_k^l = \sum_{k=1}^n A_i^k \overline{A_j^k} = \sum_{k=1}^n A_i^k (\overline{A}^T)_k^j = \\ &= (\overline{A}^T A)_i^j, \end{aligned}$$

čili f je shodnost právě tehdy, když $\overline{A}^T A = E$, tedy když A je ortogonální. $\square$

14.11.4. Matice přechodu mezi ortonormálními bázemi

Tvrzení 14.11.9. *Matice přechodu od ortonormální báze k ortonormální bázi prostoru se skalárním součinem je ortogonální (resp. unitární).*

Důkaz. Buď V prostor se skalárním součinem, $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ a $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_n)$ jeho ortonormální báze, Q matice přechodu od báze $\mathfrak{e}$ k bázi $\mathfrak{f}$. Podle Tvzení 14.5.1

$$e_i = \sum_{k=1}^n (e_i, f_k) f_k, \quad \text{čili} \quad Q_i^k = (e_i, f_k).$$

Potom

$$\begin{aligned} (\overline{Q}^T Q)_j^i &= \sum_{k=1}^n (\overline{Q}^T)_k^i Q_j^k = \sum_{k=1}^n \overline{Q}_i^k Q_j^k = \sum_{k=1}^n \overline{(e_i, f_k)} (e_j, f_k) = \sum_{k=1}^n (e_j, (e_i, f_k) f_k) = \\ &= \left(e_j, \sum_{k=1}^n (e_i, f_k) f_k \right) = (e_j, e_i) = \delta_j^i, \end{aligned}$$

takže

$$\overline{Q}^T Q = E \quad \text{a matice } Q \text{ je ortogonální (resp. unitární).}$$

□

Důsledek. *Bud' Q matice přechodu od ortonormální báze k ortonormální bázi eukleidovského prostoru. Potom*

$$\det Q = \begin{cases} 1, & \text{jestliže uvedené báze mají stejnou orientaci,} \\ -1, & \text{jestliže uvedené báze nemají stejnou orientaci.} \end{cases}$$

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Tvrzení 14.11.9 a 14.11.6.

□

15. BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

V celé kapitole $P = \mathbb{R}$ nebo $P = \mathbb{C}$ a vektorové prostory jsou nad P .

15.1. Bilineární formy

Definice 15.1.1. Buď V vektorový prostor nad P , kde $P = \mathbb{R}$ nebo $P = \mathbb{C}$. *Bilineární forma* na prostoru V je zobrazení $\beta: V \times V \rightarrow P$ takové, že pro libovolné $u, v, w \in V$ a $a \in P$

$$\begin{aligned}\beta(u + v, w) &= \beta(u, w) + \beta(v, w), & \beta(au, w) &= a\beta(u, w), \\ \beta(u, v + w) &= \beta(u, v) + \beta(u, w), & \beta(u, aw) &= a\beta(u, w),\end{aligned}$$

(linearita v prvním a druhém argumentu).

Příklad. (1) Eukleidovský skalární součin je bilineární forma.

(2) Zobrazení $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{pmatrix}$$

je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$.

(3) Buď B čtvercová matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$. Potom zobrazení $\beta_B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\beta_B(x, y) = x^T B y = \sum_{i=1}^n x^i \sum_{j=1}^n B_j^i y^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_j^i x^i y^j$$

je bilineární forma na $\mathbb{R}^n$.

Například, pro

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta_B(x, y) = x^T B y = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = x^1 y^1 + 2x^1 y^2 + 3x^2 y^1 + 4x^2 y^2. \quad \square$$

15.2. Matice bilineární formy

Definice 15.2.1. Buď V n -rozměrný vektorový prostor nad P , $(v_1, \dots, v_n)$ jeho báze a β bilineární forma na V . Matice, která v i -tém řádku a j -tém sloupku má $\beta(v_i, v_j)$, je *matice bilineární formy β vzhledem k bázi $(v_1, \dots, v_n)$* .

Tvrzení 15.2.1. Buď V n -rozměrný vektorový prostor nad P , $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ jeho báze, $u, v \in V$, $(x^1, \dots, x^n)$, resp. $(y^1, \dots, y^n)$ jejich souřadnice vzhledem k bázi $\mathbf{v}$, β bilineární forma na V a B matice formy β vzhledem k bázi $\mathbf{v}$. Potom

$$\beta(u, v) = x^T B y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_j^i x^i y^j.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\beta(u, v) &= \beta \left(\sum_{i=1}^n x^i v_i, \sum_{j=1}^n y^j v_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j \beta(v_i, v_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j B_j^i = x^T B y.\end{aligned}\quad \square$$

Tvrzení 15.2.2. *Bud' V n -rozměrný vektorový prostor nad P , $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ jeho báze a B matice typu $n \times n$ nad P . Zobrazení $\beta: V \times V \rightarrow P$,*

$$\beta(u, v) = x^T B y \quad \text{pro každé } u, v \in V,$$

kde x, y jsou souřadnice vektorů u , resp. v vzhledem k bázi $\mathbf{v}$, je bilineární forma na V a její matice vzhledem k bázi $\mathbf{v}$ je B .

Důkaz. Pro libovolné $u, v, w \in V$, jejich souřadnice x, y, z vzhledem k bázi $\mathbf{v}$ a $a \in P$ platí

$$\begin{aligned}\beta(u + v, w) &= (x + y)^T B z = (x^T + y^T) B z = x^T B z + y^T B z = \\ &= \beta(u, w) + \beta(v, w) \\ \beta(a u, v) &= (a x)^T B y = a x^T B y = \\ &= a \beta(u, v).\end{aligned}$$

Linearita ve druhém argumentu se ověří obdobně (cvičení).

Dále,

$$\beta(v_i, v_j) = e_i^T B e_j = B_j^i,$$

kde e_i, e_j jsou i -tý a j -tý vektory kanonické báze $\mathbb{R}^n$, čili B je matice bilineární formy β vzhledem k bázi $\mathbf{v}$. $\square$

Obdobně jako u matice lineární transformace změnou báze se mění i matice bilineární formy.

Tvrzení 15.2.3. *Bud' V n -rozměrný vektorový prostor, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ jeho báze, $Q_{\mathbf{vu}}$ matice přechodu od báze $\mathbf{v}$ k bázi $\mathbf{u}$, β bilineární forma na V , $B_{\mathbf{u}}$ matice formy β vzhledem k bázi $\mathbf{u}$ a $B_{\mathbf{v}}$ matice formy β vzhledem k bázi $\mathbf{v}$. Potom*

$$(B_{\mathbf{v}})_j^i = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (Q_{\mathbf{vu}})_i^k (Q_{\mathbf{vu}})_j^l (B_{\mathbf{u}})_l^k,$$

a

$$B_{\mathbf{v}} = Q_{\mathbf{vu}}^T B_{\mathbf{u}} Q_{\mathbf{vu}}.$$

Důkaz. Pro přehlednost zápisu označme $Q = Q_{\mathbf{vu}}$. Potom

$$v_i = \sum_{k=1}^n Q_i^k u_k \quad \text{a} \quad v_j = \sum_{l=1}^n Q_j^l u_l,$$

takže

$$\begin{aligned}(B_{\mathbf{v}})_j^i &= \beta(v_i, v_j) = \beta \left(\sum_{k=1}^n Q_i^k u_k, \sum_{l=1}^n Q_j^l u_l \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n Q_i^k Q_j^l \beta(u_k, u_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n Q_i^k Q_j^l (B_{\mathbf{u}})_l^k = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (Q^T)_k^i (B_{\mathbf{u}})_l^k Q_j^l = (Q^T B_{\mathbf{u}} Q)_j^i\end{aligned}\quad \square$$

Cvičení. Dokažte, že $B_u = Q_{uv}^T B_v Q_{uv}$. □

Definice 15.2.2. Matice A, B jsou *kongruentní*, jestliže existuje regulární matice Q taková, že $A = Q^T B Q$.

Je-li Q ortogonální matice, tedy $Q^T = Q^{-1}$, potom jsou matice A, B podobné i kongruentní.

Kongruentní matice vyjadřují jednu a tutéž bilineární formu v různých bázích.

Tvrzení 15.2.4. *Kongruentnost čtvercových matic je relace ekvivalence.*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 15.2.5. *Matice kongruentní se symetrickou (antisymetrickou) maticí je symetrická (antisymetrická).*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 15.2.6. *Elementární řádkovou úpravou čtvercové matice a stejnou elementární sloupkovou úpravou takto získané matice, dostaneme matici kongruentní s původní maticí.*

Důkaz. Buď A čtvercová matice. Elementární řádkovou úpravou matice A získáme matici QA , kde Q je vhodná elementární matice. Stejnou elementární sloupkovou úpravou matice A získáme matici AQ^T . Těmito dvěma úpravami tedy dostaneme matici QAQ^T , což je matice kongruentní s maticí A , protože elementární matice jsou regulární. □