

3.2. Gaussova eliminační metoda a obecné řešení

Řešit soustavu lineárních rovnic, tj. hledat množinu všech jejích řešení, je možné tak, že soustavu upravíme na takový tvar, ze kterého všechna řešení vyčteme. Je ovšem nutné používat pouze takové úpravy, po jejichž provedení množina všech řešení nové soustavy je stejná jako množina všech řešení původní soustavy.

Definice 3.2.1. *Ekvivalentní úprava* soustavy lineárních rovnic je úprava, jejíž provedením vznikne soustava lineárních rovnic s množinou všech řešení rovnou množině všech řešení původní soustavy.

Soustavy lineárních rovnic, jejichž množiny všech řešení se vzájemně rovnají, jsou *ekvivalentní*.

Definice 3.2.2. *Elementární úpravy* soustavy lineárních rovnic jsou

- (i) přičtení násobku jedné rovnice k jiné rovnici,
- (ii) vynásobení jedné rovnice nenulovým prvkem pole,
- (iii) vzájemná výměna dvou rovnic.

Ke každé elementární úpravě soustavy existuje elementární úprava (stejněho typu), která soustavu převede do původního stavu.

Je zřejmé, že provedení řádkové elementární úpravy rozšířené matice soustavy je totéž co provedení obdobné elementární úpravy soustavy.

Podle následujícího tvrzení elementární úpravy jsou ekvivalentní.

Tvrzení 3.2.1. *Elementární úpravy soustavy lineárních rovnic jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Mějme soustavu lineárních rovnic o n neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$ a buď $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ její řešení, tj. pro každé i platí rovnost

$$a_1^i \xi^1 + a_2^i \xi^2 + \dots + a_n^i \xi^n = b^i.$$

Zvolme si jednu elementární úpravu, přičtení c -násobku j -té rovnice k i -té rovnici, kde $i \neq j$ (pro zbylé dvě úpravy je důkaz analogický). Po této úpravě dostaneme novou soustavu, která se od té původní liší jen v i -té rovnici, ta v nové soustavě je

$$(a_1^i + ca_1^j)x^1 + \dots + (a_n^i + ca_n^j)x^n = b^i + cb^j.$$

Je zřejmé, že ξ je řešením i této nové soustavy, protože je řešením nové i -té rovnice

$$\begin{aligned} (a_1^i + ca_1^j)\xi^1 + \dots + (a_n^i + ca_n^j)\xi^n &= \\ &= (a_1^i \xi^1 + \dots + a_n^i \xi^n) + c(a_1^j \xi^1 + \dots + a_n^j \xi^n) = \\ &= b^i + cb^j \end{aligned}$$

i všech ostatních, nezměněných rovnic soustavy. To znamená, že každé řešení původní soustavy je řešením i upravené soustavy.

Při maticovém zápisu můžeme tvrzení dokázat s využitím toho, že řádková elementární úprava matice je totéž co vynásobení elementární maticí zleva. Úpravou soustavy $Ax = b$ dostaneme soustavu $QAx = Qb$. Jestliže ξ je řešením původní soustavy, tedy $A\xi = b$, potom $QA\xi = Qb$ a ξ je řešením i upravené soustavy.

Vzhledem k tomu, že upravenou soustavu můžeme převést na tu původní opět pomocí jedné z elementárních úprav, každé řešení upravené soustavy je také řešením původní soustavy. Celkově tedy množina všech řešení upravené soustavy je rovna množině všech řešení původní soustavy. $\square$

Tvary soustavy lineárních rovnic, ze kterých lze snadno vyčíst všechna řešení soustavy, jsou ty, jejichž rozšířené matice jsou ve schodovitém a ještě lépe v Gaussově–Jordanově tvaru.

Gaussova eliminační metoda. Řádkovými elementárními úpravami upravme rozšířenou matici soustavy na Gaussův–Jordanův tvar (stačil by i schodovitý). Je zřejmé, že počet nenulových řádků příslušné upravené matice soustavy není větší než počet neznámých, čili počet sloupků matice soustavy. Jestliže upravená rozšířená matice soustavy má více (o jeden) nenulových řádků než příslušná matice soustavy, soustava (upravená i původní) nemá řešení. Jestliže počty nenulových řádků upravené rozšířené matice soustavy i příslušné matice soustavy se rovnají r ($r \leq n$), tj. rozšířená matice soustavy a matice soustavy mají stejné hodnoty, příslušná soustava rovnic (uvádíme jen ty nenulové) je

$$\begin{aligned} x^{k_1} + \dots + 0 + \dots + 0 + c_{k_r+1}^1 x^{k_r+1} + \dots + c_n^1 x^n &= d^1 \\ &\vdots \\ x^{k_{r-1}} + \dots + 0 + c_{k_r+1}^{r-1} x^{k_r+1} + \dots + c_n^{r-1} x^n &= d^{r-1} \\ x^{k_r} + c_{k_r+1}^r x^{k_r+1} + \dots + c_n^r x^n &= d^r. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice můžeme pomocí $x^{k_r+1}, \dots, x^n$ vyjádřit

$$x^{k_r} = d^r - c_{k_r+1}^r x^{k_r+1} - \dots - c_n^r x^n.$$

Z předposlední rovnice můžeme pomocí $x^{k_{r-1}+1}, \dots, x^{k_r-1}, x^{k_r+1}, \dots, x^n$ vyjádřit

$$x^{k_{r-1}} = d^{r-1} - c_{k_{r-1}+1}^{r-1} x^{k_{r-1}+1} - \dots - c_{k_r-1}^{r-1} x^{k_r-1} - c_{k_r+1}^{r-1} x^{k_r+1} - \dots - c_n^{r-1} x^n.$$

Takto můžeme postupovat až k první rovnici, ze které vyjádříme x^{k_1} pomocí neznámých $x^{k_1+1}, \dots, x^n$ kromě $x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$.

Získáme tak vyjádření r neznámých $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$ pomocí $n-r$ neznámých x^i s $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$. Když za neznámé x^i , $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$, zvolíme libovolné prvky pole P , které pak dosadíme do získaných vztahů pro neznámé $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$ a tyto hodnoty dopočítáme, dostaneme řešení soustavy $Ax = b$.

Definice 3.2.3. Neznámé $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$ z předchozího odstavce jsou *hlavní* (nebo *bázové* nebo *bázické*), neznámé x^i , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$, jsou *parametry* (nebo *nebázické neznámé* nebo *volné proměnné*) a označujeme je po řadě $t^1, \dots, t^{n-r}$.

Definice 3.2.4. Řešení soustavy lineárních rovnic o n neznámých, jejíž rozšířená matice má hodnotu r , zapsané pomocí $n-r$ parametrů je *obecné řešení*. Řešení získané z obecného řešení libovolnou volbou parametrů je *partikulární řešení*.

Je zřejmé, že každé řešení soustavy lineárních rovnic lze získat z obecného řešení vhodnou volbou parametrů. Takže množina všech řešení získaných z obecného řešení všemi možnými volbami parametrů je rovna množině všech řešení soustavy a obecné řešení reprezentuje všechna řešení soustavy.

Příklad. Mějme soustavu

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 &= 1 \\ 3x^1 + 4x^2 + 5x^3 &= 1 \end{aligned}$$

nad polem reálných čísel. Rozšířená matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Její Gaussův–Jordanův tvar je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice soustavy se rovnají 2. Uvedený Gaussův–Jordanův tvar reprezentuje soustavu

$$\begin{aligned} x^1 - x^3 &= -1 \\ x^2 + 2x^3 &= 1. \end{aligned}$$

Z první rovnice můžeme vyjádřit x^1 pomocí x^3

$$x^1 = -1 + x^3$$

a z druhé rovnice můžeme vyjádřit x^2 pomocí x^3

$$x^2 = 1 - 2x^3.$$

Máme tedy 2 (= hodnost matice) neznámé vyjádřeny pomocí jedné (= $3 - 2$) neznámé. Neznámé x^1 a x^2 jsou hlavní, neznámá x^3 je parametr a můžeme za ni dosadit libovolné reálné číslo a hlavní neznámé dopočítat. Označíme-li parametr t , dostaneme, že

$$\xi(t) = (-1 + t, 1 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

je obecné řešení soustavy. Při volbě $t = 0$ získáme partikulární řešení $\xi(0) = (-1, 1, 0)$. Množina všech řešení soustavy je

$$\{(-1 + t, 1 - 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Uspořádanou trojici $(-1 + t, 1 - 2t, t)$ můžeme zapsat

$$\begin{aligned} (-1 + t, 1 - 2t, t) &= (-1, 1, 0) + (t, -2t, t) = \\ &= (-1, 1, 0) + t(1, -2, 1) \end{aligned}$$

a množinu všech řešení soustavy pak můžeme zapsat

$$\{(-1, 1, 0) + t(1, -2, 1) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

což je přímka v $\mathbb{R}^3$ procházející bodem $(-1, 1, 0)$, který je dán sloupcem pravých stran soustavy v Gaussově–Jordanově tvaru, se směrovým vektorem $(1, -2, 1)$. Při maticovém zápisu množina všech řešení je

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Příklad. Mějme soustavu

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 &= 1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 &= 1 \\ 3x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 6x^4 &= 1 \\ 4x^1 + 5x^2 + 6x^3 + 7x^4 &= 1 \end{aligned}$$

nad polem reálných čísel. Rozšířená matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Její Gaussův–Jordanův tvar je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice soustavy se rovnají 2. Uvedený Gaussův–Jordanův tvar reprezentuje soustavu

$$\begin{aligned} x^1 - x^3 - 2x^4 &= -1 \\ x^2 + 2x^3 + 3x^4 &= 1. \end{aligned}$$

Z první rovnice můžeme vyjádřit x^1 pomocí x^3 a x^4

$$x^1 = -1 + x^3 + 2x^4$$

a z druhé rovnice můžeme vyjádřit x^2 pomocí x^3 a x^4

$$x^2 = 1 - 2x^3 - 3x^4.$$

Máme tedy 2 (= hodnost matice) neznámé vyjádřeny pomocí dvou (= 4–2) neznámých. Neznámé x^1 a x^2 jsou hlavní, neznámé x^3 a x^4 jsou parametry a můžeme za ně dosadit libovolná reálná čísla a hlavní neznámé dopočítat. Označíme-li parametry t^1 a t^2 , dostaneme, že

$$\xi(t^1, t^2) = (-1 + t^1 + 2t^2, 1 - 2t^1 - 3t^2, t^1, t^2), \quad t^1, t^2 \in \mathbb{R},$$

je obecné řešení soustavy. Při volbě $t^1 = 1, t^2 = 0$ získáme partikulární řešení $\xi(1, 0) = (0, -1, 1, 0)$, při volbě $t^1 = 0, t^2 = 1$ získáme partikulární řešení $\xi(0, 1) = (1, -2, 0, 1)$. Množina všech řešení soustavy je

$$\{(-1 + t^1 + 2t^2, 1 - 2t^1 - 3t^2, t^1, t^2) \mid t^1, t^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Uspořádanou čtveřici $(-1 + t^1 + 2t^2, 1 - 2t^1 - 3t^2, t^1, t^2)$ můžeme zapsat

$$\begin{aligned} (-1 + t^1 + 2t^2, 1 - 2t^1 - 3t^2, t^1, t^2) &= \\ &= (-1, 1, 0, 0) + (t^1, -2t^1, t^1, 0) + (2t^2, -3t^2, 0, t^2) = \\ &= (-1, 1, 0, 0) + t^1(1, -2, 1, 0) + t^2(2, -3, 0, 1) \end{aligned}$$

a množinu všech řešení soustavy pak můžeme zapsat

$$\{(-1, 1, 0, 0) + t^1(1, -2, 1, 0) + t^2(2, -3, 0, 1) \mid t^1, t^2 \in \mathbb{R}\},$$

při maticovém zápisu

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t^1, t^2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

3.3. Frobeniova věta

Z předchozích pozorování a tvrzení vyplývá následující věta.

Tvrzení 3.3.1 (Frobeniova věta). *Soustava lineárních rovnic má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnota matice soustavy se rovná hodnotě rozšířené matice soustavy.*

Důkaz. Jestliže soustava $Ax = b$ má nějaké řešení, pak sloupek b pravých stran je lineární kombinací sloupků matice A a rozšířením matice A o takový sloupek se hodnota nezmění. Takže matice A a $\bar{A}$ mají stejné hodnoty.

Jestliže se hodnoty matic A a $\bar{A}$ rovnají, a rovnají se tedy i hodnoty příslušných matic v Gaussově–Jordanově tvaru, pak použitím Gaussovy eliminační metody a libovolnou volbou parametrů získáme řešení soustavy. $\square$

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned}x^1 + 2x^2 - x^3 &= 1 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 1 \\ 2x^1 - x^2 + x^3 &= 1\end{aligned}$$

má matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a rozšířenou matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jejich hodnoty jsou stejné, obě se rovnají 3, takže podle Frobeniovy věty soustava má řešení. Jelikož hodnoty jsou rovny počtu neznámých, všechny neznámé jsou hlavní, žádná není parametr a soustava má právě jedno řešení.

(2) Soustava

$$x - y = 1$$

má matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a rozšířenou matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jejich hodnoty jsou stejné, obě se rovnají 1, takže podle Frobeniovy věty soustava má řešení. Jelikož hodnoty jsou nižší než počet neznámých, jedna neznámá je hlavní, jedna neznámá je parametr a soustava má nekonečně mnoho řešení.

(3) Soustava

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ x &= 1\end{aligned}$$

má matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a rozšířenou matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice soustavy je rovna 1 a hodnost rozšířené matice soustavy je rovna 2, takže podle Frobeniovy věty soustava nemá řešení. $\square$

3.4. Cramerovo pravidlo

Podle Frobeniovy věty soustava s regulární maticí má řešení. Podle následující věty má právě jedno řešení.

Tvrzení 3.4.1. *Bud' $Ax = b$ soustava se čtvercovou maticí A . Potom A je regulární právě tehdy, když $Ax = b$ má právě jedno řešení, a to*

$$\xi = A^{-1}b.$$

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Necht' A je regulární matice, tedy invertibilní, s maximální hodností. Potom podle Frobeniovy věty soustava $Ax = b$ má řešení. A pro každé řešení ξ platí $A\xi = b$, tedy $\xi = A^{-1}A\xi = A^{-1}b$, čili řešení je jediné.

„ $\Leftarrow$ “ Necht' A není regulární matice, tedy je singulární, s hodností menší než počet jejích řádků, který se rovná počtu neznámých. Pokud hodnost rozšířené matice soustavy je větší než hodnost matice soustavy, soustava nemá řešení. Pokud hodnost rozšířené matice soustavy je stejná jako hodnost matice soustavy, potom v obecném řešení soustavy vystupuje aspoň jeden parametr, za který lze dosadit libovolný prvek pole. Vzhledem k tomu, že pole obsahuje více než jeden prvek, soustava má více než jedno řešení. $\square$

Tvrzení 3.4.2 (Cramerovo pravidlo). *Bud' $Ax = b$ soustava s regulární maticí A a řešením $\xi = (\xi^1 \ \xi^2 \ \dots \ \xi^n)^T$. Pak pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$*

$$\xi^i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kde A_i je matice vzniklá z matice A výměnou i -tého sloupku za sloupek pravých stran b :

$$A_i = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & & & & & \\ a_1^n & \dots & a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Při rozvoji podle i -tého sloupku dostáváme $\det A_i = \sum_j \hat{A}_i^j b^j$. Dále

$$\xi = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A) \cdot b = \frac{1}{\det A} \hat{A}^T b$$

a tedy

$$\xi^i = \frac{\sum_j (\hat{A}^T)_j^i b^j}{\det A} = \frac{\sum_j \hat{A}_i^j b^j}{\det A} = \frac{\sum_j (\hat{A}_i)_j^j b^j}{\det A} = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Tvrzení můžeme dokázat také takto: Je-li ξ řešení soustavy $Ax = b$, pak b je lineární kombinací sloupků A_i° s koeficienty $\xi^1, \dots, \xi^n$, tedy

$$b = \xi^1 A_1^\circ + \xi^2 A_2^\circ + \dots + \xi^n A_n^\circ = \sum_j \xi^j A_j^\circ$$

a matice A_i má v i -tém sloupku tuto lineární kombinaci všech sloupků matice A . Potom

$$\begin{aligned}
 \det A_i &= \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & b & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & \sum_j \xi^j A_j^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\
 &= \sum_j \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & \xi^j A_j^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\
 &= \sum_j \xi^j \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & A_j^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\
 &= \xi^i \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & A_i^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\
 &= \xi^i \det A,
 \end{aligned}$$

z čehož dostaneme požadovaný vztah. $\square$

Příklad. Mějme soustavu

$$\begin{aligned}
 x^1 + 2x^2 - x^3 &= 1 \\
 -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 1 \\
 2x^1 - x^2 + x^3 &= 1.
 \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

a

$$\det A = 14 \qquad \det A_1 = 7 \qquad \det A_2 = 7 \qquad \det A_3 = 7.$$

Proto

$$\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

3.5. Homogenní soustavy lineárních rovnic

Definice 3.5.1. Soustava lineárních rovnic s nulovou pravou stranou je *homogenní*.

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned}
 x^1 + 2x^2 - x^3 &= 0 \\
 -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 0 \\
 2x^1 - x^2 + x^3 &= 0
 \end{aligned}$$

je homogenní.

(2) Soustava

$$x^1 - x^2 + x^3 = 0$$

je homogenní.

(3) Soustava

$$x = 0$$

$$x = 1$$

není homogenní. □

Tvrzení 3.5.1. (1) Každá homogenní soustava má řešení.

(2) Každá homogenní soustava má nulové řešení.

(3) Homogenní soustava se čtvercovou maticí má pouze nulové řešení právě tehdy, když matice soustavy je regulární.

(4) Homogenní soustava se čtvercovou maticí má nenulové řešení právě tehdy, když determinant matice soustavy je roven nule.

(5) Homogenní soustava, ve které je méně rovnic než neznámých, má nenulové řešení.

Důkaz. (1) Existence řešení homogenní soustavy vyplývá z Frobeniovy věty i z následujícího bodu (2).

(2) Vzhledem k tomu, že $0 \cdot p = p \cdot 0 = 0$ pro každé p z příslušného pole, viz kapitola 6, je zřejmé, že homogenní soustava má nulové řešení.

(3) Vyplývá z Tvrzení 3.4.1.

(4) Tvrzení je ekvivalentní předchozímu.

(5) V tomto případě při použití Gaussovy eliminační metody kladný počet neznámých jsou parametry a vhodnou volbou libovolného parametru získáme nenulové řešení. □

Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic má následující vlastnost.

Tvrzení 3.5.2. Lineární kombinace řešení homogenní soustavy je také řešení té soustavy. Speciálně, nulový sloupek je řešení, součet řešení je řešení a c -násobek řešení je řešení.

Důkaz. Necht' $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ jsou řešení soustavy $Ax = 0$, čili $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0, \dots, A\xi_k = 0$. Buďte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in P$. Potom

$$A(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \dots + \alpha_k\xi_k) = \alpha_1A\xi_1 + \alpha_2A\xi_2 + \dots + \alpha_kA\xi_k = 0$$

a lineární kombinace řešení je tedy také řešení soustavy. □

Definice 3.5.2. *Fundamentální systém řešení homogenní soustavy* je taková množina řešení té soustavy, která je lineárně nezávislá a každé řešení lze vyjádřit jako lineární kombinaci řešení z této množiny.

Tvrzení 3.5.3. *Fundamentální systém řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ o n neznámých má $n - \text{rank } A$ prvků.*

Důkaz. Obecné řešení ξ soustavy $Ax = 0$ o n neznámých je vyjádřeno pomocí $n - \text{rank } A$ parametrů $t^1, \dots, t^{n-\text{rank } A}$, tedy $\xi = \xi(t^1, \dots, t^{n-\text{rank } A})$. Provedeme-li $n - \text{rank } A$ voleb parametrů

$$(t^1, \dots, t^{n-\text{rank } A}) = (1, 0, \dots, 0),$$

$$(t^1, \dots, t^{n-\text{rank } A}) = (0, 1, \dots, 0),$$

...

$$(t^1, \dots, t^{n-\text{rank } A}) = (0, \dots, 0, 1),$$

dostaneme množinu partikulárních řešení

$$\{\xi(1, 0, \dots, 0), \xi(0, 1, \dots, 0), \dots, \xi(0, \dots, 0, 1)\},$$

která je lineárně nezávislá a

$$\xi(t^1, \dots, t^{n-\text{rank } A}) = t^1 \xi(1, 0, \dots, 0) + t^2 \xi(0, 1, \dots, 0) + \dots + t^{n-\text{rank } A} \xi(0, \dots, 0, 1),$$

takže obecné řešení, čili každé řešení, soustavy je lineární kombinací těchto partikulárních řešení. $\square$

Příklad. (1) Soustava

$$x^1 - x^2 = 0$$

má 2 neznámé, matice soustavy má hodnotu 1, obecné řešení je

$$\xi(t) = (t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

množina všech řešení soustavy je

$$\{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

a fundamentální systém řešení soustavy je například

$$\{(1, 1)\}.$$

(2) Soustava

$$x^1 + x^2 + 2x^3 = 0$$

$$-x^1 + x^2 + 2x^3 = 0$$

$$x^1 + 3x^2 + 6x^3 = 0$$

má 3 neznámé, matice soustavy má hodnotu 2, obecné řešení je

$$\xi(t) = (0, -2t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

množina všech řešení soustavy je

$$\{(0, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(0, -2, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

a fundamentální systém řešení soustavy je například

$$\{(0, -2, 1)\}.$$

(3) Soustava

$$x^1 - x^2 + x^3 = 0$$

má 3 neznámé, matice soustavy má hodnotu 1, obecné řešení je

$$\xi(t^1, t^2) = (t^1 - t^2, t^1, t^2), \quad t^1, t^2 \in \mathbb{R},$$

množina všech řešení soustavy je

$$\{(t^1 - t^2, t^1, t^2) \mid t^1, t^2 \in \mathbb{R}\} = \{t^1(1, 1, 0) - t^2(-1, 0, 1) \mid t^1, t^2 \in \mathbb{R}\}$$

a fundamentální systém řešení soustavy je například

$$\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

(4) Soustava

$$x^1 + 2x^2 = 0$$

$$3x^1 + 4x^2 = 0$$

má 2 neznámé, matice soustavy má hodnotu 2 a soustava má jediné řešení, čili obecné řešení je

$$\xi = (0, 0),$$

množina všech řešení soustavy je

$$\{(0, 0)\}$$

a fundamentální systém řešení soustavy je $\emptyset$.

(5) Soustava

$$0x = 0$$

má 1 neznámou, matice soustavy má hodnotu 0, obecné řešení je

$$\xi(t) = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

množina všech řešení soustavy je

$$\{t \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

a fundamentální systém řešení soustavy je například

$$\{1\}.$$

□

Poznámka. Je-li $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$ fundamentální systém řešení nějaké soustavy, potom

$$t^1 \xi_1 + t^2 \xi_2 + \dots + t^r \xi_r, \quad t^1, t^2, \dots, t^r \in P,$$

je obecné řešení soustavy a

$$\{t^1 \xi_1 + t^2 \xi_2 + \dots + t^r \xi_r \mid t^1, t^2, \dots, t^r \in P\}$$

je množina všech řešení soustavy.

Homogenní soustava rovnic k zadanému fundamentálnímu systému řešení.

Pro libovolnou lineárně nezávislou množinu $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\} \subset P^n$ existuje homogenní soustava lineárních rovnic taková, že $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$ je její fundamentální systém řešení. Takových soustav, vzájemně ekvivalentních, existuje více. Uvedeme postup nalezení jedné z nich.

Množina $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$ uspořádaných n -tic prvků pole P má být fundamentální systém řešení soustavy, takže hledáme homogenní soustavu

$$\begin{aligned} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n &= 0 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n &= 0 \\ &\vdots \\ a_1^{n-r} x^1 + a_2^{n-r} x^2 + \dots + a_n^{n-r} x^n &= 0 \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad Ax = 0$$

lineárních rovnic nad polem P o n neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$, jejíž matice $A = (a_j^i)$ má hodnotu $n - r$. Je tedy potřeba najít vhodné koeficienty a_j^i .

Jednotlivé uspořádané n -tice $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ mají být řešení soustavy $Ax = 0$, takže po jejich dosazení za x dostaneme $r \cdot (n - r)$ homogenních rovnic o celkem $n \cdot (n - r)$ neznámých a_j^i , $i \in \{1, \dots, n - r\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Ovšem, pro každé $k \in \{1, \dots, r\}$ dosazením ξ_k za x dostaneme $A\xi_k = 0$, což představuje $n - r$ rovnic

$$\begin{aligned} \xi_k^1 a_1^1 + \xi_k^2 a_2^1 + \dots + \xi_k^n a_n^1 &= 0 \\ \xi_k^1 a_1^2 + \xi_k^2 a_2^2 + \dots + \xi_k^n a_n^2 &= 0 \\ &\vdots \\ \xi_k^1 a_1^{n-r} + \xi_k^2 a_2^{n-r} + \dots + \xi_k^n a_n^{n-r} &= 0, \end{aligned}$$

z nichž každá má jiných n neznámých $a_1^j, \dots, a_n^j$, $j \in \{1, \dots, n - r\}$, ale všechny mají stejné koeficienty $\xi_k^1, \dots, \xi_k^n$, takže všechny mají stejnou množinu všech řešení a stačí pro každé $k \in \{1, \dots, r\}$ uvažovat jen jednu rovnici

$$\xi_k^1 a^1 + \xi_k^2 a^2 + \dots + \xi_k^n a^n = 0$$

s neznámými $a^1, a^2, \dots, a^n$. Dosazením všech $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ tak dostaneme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}\xi_1^1 a^1 + \xi_1^2 a^2 + \dots + \xi_1^n a^n &= 0 \\ \xi_2^1 a^1 + \xi_2^2 a^2 + \dots + \xi_2^n a^n &= 0 \\ &\vdots \\ \xi_r^1 a^1 + \xi_r^2 a^2 + \dots + \xi_r^n a^n &= 0\end{aligned}$$

r lineárních rovnic o n neznámých $a^1, a^2, \dots, a^n$ s maticí Ξ , jejíž řádky jsou tvořeny uspořádanými n -ticemi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$. Hodnota matice Ξ je tedy rovna r , fundamentální systém řešení má $n - r$ prvků $(a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1), (a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2), \dots, (a_1^{n-r}, a_2^{n-r}, \dots, a_n^{n-r})$ a toto jsou řádky hledané matice A .

Příklad. Necht' $\xi_1 = (1, 2, 3, 4), \xi_2 = (4, 3, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$. Najdeme homogenní soustavu lineárních rovnic nad polem $\mathbb{R}$, jejímž fundamentálním systémem řešení je

$$\{\xi_1, \xi_2\}.$$

Hledáme tedy soustavu $Ax = 0$ dvou rovnic o čtyřech neznámých. Sestavíme soustavu $\Xi \cdot a = 0$, kde

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{pmatrix}.$$

Tedy,

$$\begin{aligned}a^1 + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 &= 0 \\ 4a^1 + 3a^2 + 2a^3 + a^4 &= 0.\end{aligned}$$

Fundamentální systém řešení této soustavy je, například,

$$\{(2, -3, 0, 1), (1, -2, 1, 0)\}.$$

Zvolíme-li

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = 0$$

tedy

$$\begin{aligned}2x^1 - 3x^2 + x^4 &= 0 \\ x^1 - 2x^2 + x^3 &= 0.\end{aligned}$$

Potom $\{(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1)\}$ je fundamentální systém řešení této soustavy,

$$t^1(1, 2, 3, 4) + t^2(4, 3, 2, 1), \quad t^1, t^2 \in \mathbb{R},$$

je její obecné řešení a

$$\{t^1(1, 2, 3, 4) + t^2(4, 3, 2, 1) \mid t^1, t^2 \in \mathbb{R}\}$$

je množina všech řešení soustavy. □

3.6. Nehomogenní soustavy lineárních rovnic

Definice 3.6.1. Soustava lineárních rovnic s nenulovou pravou stranou je *nehomogenní*. Je-li $Ax = b$ nehomogenní soustava, potom $Ax = 0$ je *homogenizovaná soustava*.

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned}x^1 + 2x^2 - x^3 &= 1 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 0 \\ 2x^1 - x^2 + x^3 &= 3\end{aligned}$$

je nehomogenní.

(2) Soustava

$$x^1 - x^2 + x^3 = 1$$

je nehomogenní. □

Tvrzení 3.6.1. (1) Pokud nehomogenní soustava lineárních rovnic má právě jedno řešení, potom homogenizovaná soustava má jen nulové řešení.

(2) Nehomogenní soustava lineárních rovnic se čtvercovou maticí má právě jedno řešení právě tehdy, když homogenizovaná soustava má jen nulové řešení.

(3) Nehomogenní soustava lineárních rovnic se čtvercovou maticí má právě jedno řešení právě tehdy, když matice soustavy je regulární.

(4) Nehomogenní soustava lineárních rovnic nemá nulové řešení.

Důkaz. (1) Má-li soustava právě jedno řešení, potom žádná z neznámých není parametr a homogenizovaná soustava má jen nulové řešení.

(2) Vyplývá z předchozího bodu a z Gaussovy eliminační metody.

(3) Vyplývá z předchozího bodu a z Tvzení 3.5.1.

(4) Zřejmé. □

Množina všech řešení nehomogenní soustavy nemá vlastnosti uvedené v Tvzení 3.5.2, které má množina všech řešení homogenní soustavy. Totiž, součet řešení nehomogenní soustavy není její řešení, c -násobek řešení nehomogenní soustavy, kde $c \neq 1$, není její řešení a lineární kombinace řešení nehomogenní soustavy není její řešení.

Tvrzení 3.6.2. Necht' ξ_p je nějaké řešení soustavy $Ax = b$. Potom pro každé řešení ξ této soustavy existuje jediné řešení ξ_0 homogenizované soustavy takové, že $\xi = \xi_p + \xi_0$.

Na druhou stranu, pro libovolné řešení ξ_0 homogenizované soustavy je $\xi = \xi_p + \xi_0$ řešením soustavy $Ax = b$.

Důkaz. Buďte ξ_p a ξ řešení soustavy. Položme $\xi_0 = \xi - \xi_p$. Potom $A\xi_0 = A(\xi - \xi_p) = A\xi - A\xi_p = b - b = 0$. Tedy, ξ_0 je řešením homogenizované soustavy a $\xi = \xi_0 + \xi_p$. Jednoznačnost ξ_0 je zřejmá.

Je-li $A\xi_0 = 0$, pak $A\xi = A(\xi_p + \xi_0) = A\xi_p + A\xi_0 = b + 0 = b$. □

Důsledek. (1) Má-li nehomogenní soustava řešení, potom její obecné řešení je součtem obecného řešení homogenizované soustavy a nějakého partikulárního řešení nehomogenní soustavy.

(2) Je-li ξ_p řešení soustavy $Ax = b$, potom množina všech řešení této soustavy je

$$\{\xi_p + \xi_0 \mid \xi_0 \text{ je řešení homogenizované soustavy } Ax = 0\}.$$

Cvičení. Rozdíl libovolných dvou řešení nehomogenní soustavy je řešení homogenizované soustavy. $\square$

Příklad. (1) Jedno z řešení soustavy

$$x^1 - x^2 = 1$$

je $(1, 0)$. Množina všech řešení homogenizované soustavy

$$x^1 - x^2 = 0$$

je $\{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Množina všech řešení nehomogenní soustavy

$$x^1 - x^2 = 1$$

je $\{(1, 0) + (t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1 + t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(2) Soustava

$$x^1 + 2x^2 = 0$$

$$3x^1 + 4x^2 = 2$$

má řešení $(2, -1)$. Množina všech řešení homogenizované soustavy

$$x^1 + 2x^2 = 0$$

$$3x^1 + 4x^2 = 0$$

je $\{(0, 0)\}$. Množina všech řešení nehomogenní soustavy

$$x^1 + 2x^2 = 0$$

$$3x^1 + 4x^2 = 2$$

je $\{(2, -1) + (0, 0)\} = \{(2, -1)\}$. $\square$

4. POLYNOMY

4.1. Polynomy, algebraické vlastnosti, dělitelnost

Definice 4.1.1. Buď P pole, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in P$, $x \notin P$. *Polynom (mnohočlen)* jedné neurčité x nad polem P je výraz tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Zde x^i jsou mocniny, nejedná se o horní indexy. Mocninu x^0 klademe rovnu $1 \in P$, takže $a_0 = a_0 \cdot 1 = a_0 x^0$. Množinu všech polynomů neurčité x nad polem P označujeme $P[x]$.

Prvky $a_0, \dots, a_n \in P$ jsou *koefficienty*, a_i je *i -tý koefficient*. Koefficient a_0 je *absolutní člen*.

Polynom se všemi koefficienty nulovými je *nulový polynom* a označujeme ho 0.

Sčítance $a_i x^i$ s nulovými koefficienty a_i se v zápisu polynomu obvykle neuvádí, ty s nenulovými koefficienty se samozřejmě uvádí a neuvedené koefficienty a_i jsou tedy nulové.

Vyjádření „polynom nad polem P “ tedy znamená, že se jedná o „polynom s koefficienty z pole P “.

Příklad. $6x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 1x + 6 \in \mathbb{R}[x]$, $a_0 = 6$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 6$, pro $i > 4$ $a_i = 0$. $\square$

Definice 4.1.2. Polynomy $f, g \in P[x]$,

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

se sobě *rovnají*, jestliže se rovnají jejich příslušné koefficienty. Tedy,

$$f = g, \text{ jestliže } a_i = b_i \text{ pro všechna nezáporná celá } i.$$

Definice 4.1.3. *Stupeň* polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je největší číslo s takové, že $a_s \neq 0$, označujeme ho $\deg f$. Koefficient a_s , kde s je stupeň, je *vedoucí koefficient* polynomu f , označujeme ho $\text{lc } f$.

Pro nulový polynom nemáme definován ani stupeň ani vedoucí koefficient.

Příklad. Pro $f = 6x^4 + 3x^2 + x + 6$ je $\deg f = 4$ a $\text{lc } f = 6$. $\square$

Definice 4.1.4. Nulový polynom a polynomy stupně 0 jsou *konstantní*, polynomy stupně 1 jsou *lineární*, polynomy stupně 2 jsou *kvadratické*, polynomy stupně 3 jsou *kubické*, polynomy stupně 4 jsou *bikvadratické*.

Definice 4.1.5. Pro polynomy $f, g \in P[x]$,

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

označme $p = \max\{n, m\}$. *Součet* polynomů f a g je polynom $f + g \in P[x]$,

$$f + g = (a_p + b_p)x^p + (a_{p-1} + b_{p-1})x^{p-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0.$$

Definice 4.1.6. *Součin* polynomů $f, g \in P[x]$,

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

je polynom $fg \in P[x]$,

$$\begin{aligned} fg &= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k = \\ &= a_n b_m x^{n+m} + \\ &\quad + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \\ &\quad + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + \\ &\quad + a_0 b_0. \end{aligned}$$

Tedy, pro $k \in \{0, 1, \dots, n+m\}$ k -tý koeficient polynomu fg je

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k.$$

Je-li například f konstantní polynom, $f = a_0$, pak

$$fg = a_0 g = a_0 b_m x^m + a_0 b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 b_1 x + a_0 b_0.$$

Speciálně, pokud $f = -1$, pak

$$fg = -g = -b_m x^m - b_{m-1} x^{m-1} - \cdots - b_1 x - b_0$$

je polynom *opačný* k polynomu g .

Příklad. Pro

$$f = 6x^4 + 3x^2 + 6, \quad g = x^3 - 2x^2 - x$$

je

$$f + g = 6x^4 + x^3 + x^2 - x + 6,$$

$$fg = 6x^7 - 12x^6 - 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 6x. \quad \square$$

Tvrzení 4.1.1. *Bud' $f, g \in P[x]$ nenulové. Potom*

- (1) fg je nenulový polynom,
- (2) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$,
- (3) $\text{lc}(fg) = \text{lc } f \cdot \text{lc } g$.

Důkaz. Bud' f, g nenulové polynomy. Nechť $\deg f = n$, $\deg g = m$, $\text{lc } f = a_n$ a $\text{lc } g = b_m$. Jelikož $a_n \neq 0$ a $b_m \neq 0$, také $a_n b_m \neq 0$, viz kapitola 6. Ovšem, $a_n b_m$ je $(n+m)$ -tý koeficient součinu fg , takže fg je nenulový polynom. Pro $k > n+m$ je k -tý koeficient roven nule, takže $\text{lc } fg = a_n b_m = \text{lc } f \cdot \text{lc } g$ a $\deg(fg) = n+m = \deg f + \deg g$. $\square$

Cvičení. Součin polynomů je nulový právě tehdy, když aspoň jeden z nich je nulový. $\square$