

4. přednáška, 15. 10. 2025

Definice 2.2.2. Čtvercová matice je (*horní* resp. *dolní*) *trojúhelníková* (nebo v (*horním* resp. *dolním*) *trojúhelníkovém tvaru*), jestliže pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A_j^i = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$.

Každá čtvercová matice ve schodovitém tvaru je také v (horním) trojúhelníkovém tvaru a tedy každou čtvercovou matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na trojúhelníkový tvar.

Tvrzení 2.2.3. *Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.*

Důkaz. Buď A horní trojúhelníková matice typu $n \times n$. Buď σ permutace na množině I_n . Jestliže pro nějaké $i \in I_n$ platí $\sigma_i < i$, pak $A_{\sigma_i}^i$ je pod diagonálou, tedy $A_{\sigma_i}^i = 0$ a také $\text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \cdots A_{\sigma_i}^i \cdots A_{\sigma_n}^n = 0$. Jediná permutace σ taková, že $\sigma_i \geq i$ pro každé i , je identita. Jelikož $\text{sgn id} = 1$, $\det A = A_1^1 A_2^2 \cdots A_n^n$.

Pro dolní trojúhelníkové matice je důkaz analogický. □

Důsledek. (1) *Determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na diagonále.*

(2) *Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na diagonále.*

(3) *Determinant jednotkové matice je roven 1.*

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24. \quad \square$$

Determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Příklad. (1) $E^{i,j}(c)$ je trojúhelníková matice a na diagonále má jen jedničky, proto

$$\det E^{i,j}(c) = 1.$$

(2) $E^i(c)$ je diagonální matice a na diagonále má jedno c a jinak jen jedničky, proto

$$\det E^i(c) = c.$$

(3) Jelikož v každém řádku a v každém sloupku matice $E^{i,j}$ je právě jedna jednička a ostatní prvky jsou nuly, existuje jediná permutace τ na I_n , pro kterou jsou všechny $(E^{i,j})_{\tau_1}^1, \dots, (E^{i,j})_{\tau_n}^n$ rovny jedné. Pro ostatní permutace je aspoň jeden z těchto prvků nulový. Díky tvaru $E^{i,j}$ je τ transpozice, takže $\text{sgn } \tau = -1$. Proto

$$\det E^{i,j} = (-1) \cdot (E^{i,j})_{\tau_1}^1 \cdots (E^{i,j})_{\tau_n}^n = -1. \quad \square$$

Tvrzení 2.2.4. *Pro každou čtvercovou matici A platí $\det A^T = \det A$.*

Důkaz. Činitele v součinu $A_1^{\sigma_1} \dots A_i^{\sigma_i} \dots A_n^{\sigma_n}$ můžeme uspořádat podle vzrůstajícího řádkového indexu $A_1^1 \dots A_{\sigma_i^{-1}}^i \dots A_{\sigma_n^{-1}}^n$, protože σ_i^{-1} -tý činitel v původním součinu je $A_{\sigma_i^{-1}}^{\sigma_i^{-1}} = A_{\sigma_i^{-1}}^i$. Potom

$$\begin{aligned} \det A^\Gamma &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot (A^\Gamma)_{\sigma_1}^1 \dots (A^\Gamma)_{\sigma_i}^i \dots (A^\Gamma)_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_1^{\sigma_1} \dots A_i^{\sigma_i} \dots A_n^{\sigma_n} = & (\text{přeuspořádání}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1^{-1}}^1 \dots A_{\sigma_i^{-1}}^i \dots A_{\sigma_n^{-1}}^n = & (\operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \cdot A_{\sigma_1^{-1}}^1 \dots A_{\sigma_i^{-1}}^i \dots A_{\sigma_n^{-1}}^n = \\ &= \det A, \end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n , tak σ^{-1} také. $\square$

Tvrzení 2.2.5. *Determinant matice, která má buď dva řádky stejné nebo dva sloupky stejné, je roven nule.*

Důkaz. Bud' A matice typu $n \times n$, která má i -tý řádek stejný jako j -tý ($i \neq j$), tedy $A_k^i = A_k^j$ pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Bud' $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j , čili $\operatorname{sgn} \tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\operatorname{sgn} \sigma' = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau_{ij} = -\operatorname{sgn} \sigma$ a člen determinantu odpovídající permutaci σ' je

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot A_{\sigma'_1}^1 \dots A_{\sigma'_i}^i \dots A_{\sigma'_j}^j \dots A_{\sigma'_n}^n &= \\ &= -\operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_j}^i \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_n}^n = & (A_{\sigma_j}^i = A_{\sigma_j}^j \text{ a } A_{\sigma_i}^j = A_{\sigma_i}^i) \\ &= -\operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n, \end{aligned}$$

a je tedy opačný k členu odpovídajícímu permutaci σ .

Množinu S_n , jež má sudý počet prvků, můžeme rozložit na podmnožiny $\{\sigma, \sigma'\}$, které jsou dvouprvkové, protože $\sigma' \neq \sigma$ a $\sigma'' = \sigma$ (ověřte), a každá z nich přispívá k determinantu nulou. Takže $\det A = 0$.

Když má matice dva stejné sloupky, lze tvrzení dokázat analogicky nebo je možno použít předchozí tvrzení. $\square$

2.2.2. Elementární úpravy

Tvrzení 2.2.6. (1) *Přičtením násobku jednoho řádku, resp. sloupku k jinému řádku, resp. sloupku se determinant nezmění, čili*

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i + cA_1^j & A_2^i + cA_2^j & \dots & A_n^i + cA_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix},$$

při zápisu s použitím elementárních matic

$$\det(E^{i,j}(c) \cdot A) = \det(A \cdot E^{i,j}(c)) = \det A.$$

(2) Vynásobením jednoho řádku, nebo sloupku prvkem c se determinant vynásobí prvkem c , čili

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cA_1^i & cA_2^i & \dots & cA_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix},$$

při zápisu s použitím elementárních matic

$$\det(E^i(c) \cdot A) = \det(A \cdot E^i(c)) = c \det A.$$

(3) Vzájemnou výměnou dvou řádků, nebo dvou sloupků determinant změní znaménko, čili

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix},$$

při zápisu s použitím elementárních matic

$$\det(E^{i,j} \cdot A) = \det(A \cdot E^{i,j}) = -\det A.$$

Důkaz. Uvedeme pouze důkaz pro řádkové úpravy, pro sloupkové je analogický.

Bud' A čtvercová matice a B upravená matice.

(1) Nechť B vznikne z A přičtením c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku, čili $B_{\circ}^i = A_{\circ}^i + cA_{\circ}^j$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A . Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_j}^j \dots B_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots (A_{\sigma_i}^i + cA_{\sigma_i}^j) \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n + \\ &\quad + c \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n}_{\text{determinant matice, kde } i\text{-tý řádek je stejný jako } j\text{-tý}} = \\ &= \det A + c \cdot 0 = \det A. \end{aligned}$$

(2) Necht' B vznikne z A vynásobením i -tého řádku prvkem c , čili $B_{\circ}^i = cA_{\circ}^i$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A . Potom

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots cA_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= c \det A.\end{aligned}$$

(3) Necht' B vznikne z A vzájemnou výměnou i -tého řádku a j -tého řádku, čili $B_{\circ}^i = A_{\circ}^j$, $B_{\circ}^j = A_{\circ}^i$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A . Bud' $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j , čili $\operatorname{sgn} \tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\sigma'_i = \sigma_j$, $\sigma'_j = \sigma_i$ a $\sigma'_k = \sigma_k$ pro $k \neq i, j$ a $\operatorname{sgn} \sigma' = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau_{ij} = -\operatorname{sgn} \sigma$. Potom

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_j}^j \dots B_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_j}^i \dots A_{\sigma_n}^n = \quad (\text{komutativita součinu}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_j}^i \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma'_1}^1 \dots A_{\sigma'_i}^i \dots A_{\sigma'_j}^j \dots A_{\sigma'_n}^n = \quad (\operatorname{sgn} \sigma' = -\operatorname{sgn} \sigma) \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot A_{\sigma'_1}^1 \dots A_{\sigma'_i}^i \dots A_{\sigma'_j}^j \dots A_{\sigma'_n}^n = \\ &= -\det A,\end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n , tak σ' také. □

Cvičení. Jaký je vztah mezi $\det(cA)$ a $\det A$? □

Cvičení. Necht' A je matice typu $n \times n$ taková, že $A^T = -A$ (taková matice se nazývá *antisymetrická*). Ukažte, že je-li n liché číslo, pak $\det A = 0$. □

Příklad.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} \\ 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \square\end{aligned}$$

Důsledek. *Bud' Q elementární matice a A matice stejného typu. Pak*

$$\det QA = \det Q \cdot \det A.$$

Důkaz. (1) $\det(E^{i,j}(c)A) = \det A = 1 \cdot \det A = \det E^{i,j}(c) \cdot \det A$.

(2) $\det(E^i(c)A) = c \det A = \det E^i(c) \cdot \det A$.

(3) $\det(E^{i,j}A) = (-1) \cdot \det A = \det E^{i,j} \cdot \det A$. □

Cvičení. Dokažte, že $\det E^{i,j} = -1$ s využitím předchozího důsledku a toho, že vzájemná výměna dvou řádků je složením konečně mnoha řádkových elementárních úprav ostatních druhů. □

Tvrzení 2.2.7. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant.*

Důkaz. Bud' A regulární matice. Podle Důsledku Tvrzení 1.5.4 $A = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$, kde $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ jsou elementární matice. Potom díky Důsledku Tvrzení 2.2.6

$$\begin{aligned} \det A &= \det(Q_1 Q_2 \cdots Q_k) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k) = \cdots = \\ &= \det Q_1 \cdot \det Q_2 \cdots \det Q_k. \end{aligned}$$

A součin nenulových determinantů elementárních matic není roven nule, viz kapitola 6.

Nechť $\det A \neq 0$. Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme A na schodovitý tvar B , tedy $B = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou příslušné elementární matice. Potom opět díky Důsledku Tvrzení 2.2.6 a díky tomu, že součin nenulových prvků pole je nenulový,

$$\begin{aligned} \det B &= \det(Q_k \cdots Q_1 A) = \det Q_k \det(Q_{k-1} \cdots Q_1 A) = \cdots = \\ &= \det Q_k \det Q_{k-1} \cdots \det Q_1 \det A \neq 0. \end{aligned}$$

Jelikož B je ve schodovitém tvaru a její determinant je tedy součinem prvků na diagonále, na diagonále není žádná nula, opět viz kapitola 6. To znamená, že B nemá nulový řádek, je tedy regulární a A také. □

Důsledek. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant, a to má právě tehdy, když je invertibilní, a to je právě tehdy, když je ekvivalentní jednotkové matici.*

Tvrzení 2.2.8 (Cauchyho věta). *Bud' A, B čtvercové matice stejného typu. Pak*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Důkaz. (1) Je-li A regulární, tedy součin $Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ elementárních matic, pak

$$\begin{aligned} \det AB &= \det(Q_1 \cdots Q_k B) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k B) = \cdots = \\ &= \det Q_1 \det Q_2 \cdots \det Q_k \det B = \det(Q_1 Q_2 \cdots Q_k) \det B = \\ &= \det A \det B. \end{aligned}$$

(2) Je-li A singulární, podle Tvrzení 1.5.5 je AB také singulární a tedy

$$\det AB = 0 = \det A = \det A \cdot \det B. \quad \square$$

Cvičení. Pro regulární matici A platí $\det A^{-1} = 1/\det A$. □

Lemma 2.2.9. *Každá čtvercová matice je ekvivalentní matici v trojúhelníkovém tvaru, jejíž determinant je roven determinantu původní matice.*

Důkaz. Na převedení matice na trojúhelníkový tvar stačí pouze dva typy elementárních úprav, přičtení násobku jednoho řádku, nebo sloupku k jinému řádku, resp. sloupku, což nemění determinant, a vzájemná výměna dvou řádků, nebo dvou sloupků, čímž se změní jen znaménko determinantu.

Pokud při takovém převedení matice na trojúhelníkový tvar použijeme sudý počet výměn řádků, nebo sloupků, determinant získané matice v trojúhelníkovém tvaru je roven determinantu původní matice. Pokud použijeme lichý počet takových výměn, vynásobíme jeden řádek získané matice prvkem -1 a determinant této nové matice v trojúhelníkovém tvaru je roven determinantu původní matice. $\square$

Lemma 2.2.10.

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_k^1 & A_{k+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^k & \dots & A_k^k & A_{k+1}^k & \dots & A_n^k \\ 0 & \dots & 0 & A_{k+1}^{k+1} & \dots & A_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^k & \dots & A_k^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{k+1}^{k+1} & \dots & A_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Determinant matice A v předchozím tvrzení se *rozpadá na subdeterminanty*: jeden subdeterminant řádu k a jeden subdeterminant řádu $n - k$. Stručně ale výstižně lze toto tvrzení vyjádřit zápisem

$$\begin{vmatrix} A' & X \\ 0 & A'' \end{vmatrix} = |A'| \cdot |A''|.$$

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 8 = 2 \cdot 1 \cdot 8 = 16$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot (-2) = 6 \quad \square$$

2.2.3. Laplaceův rozvoj

Definice 2.2.3. Buď A matice typu $n \times n$. Determinant řádu $n - 1$ matice vzniklé z A vynecháním jednoho řádku a jednoho sloupku je *minor*. Při vynechání i -tého řádku a j -tého sloupku příslušný minor označujeme

$$\bar{A}_j^i.$$

Kofaktor (nebo *algebraický doplněk*) prvku A_j^i je

$$\hat{A}_j^i = (-1)^{i+j} \bar{A}_j^i.$$

Tedy, kofaktor (algebraický doplněk) prvku A_j^i je $(-1)^{i+j}$ -násobek determinantu matice, která vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupku.

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\bar{A}_1^1 = d, \quad \bar{A}_2^1 = c, \quad \bar{A}_1^2 = b, \quad \bar{A}_2^2 = a,$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_1^1 &= (-1)^{1+1} \bar{A}_1^1 = d, & \hat{A}_2^1 &= (-1)^{1+2} \bar{A}_2^1 = -c, \\ \hat{A}_1^2 &= (-1)^{2+1} \bar{A}_1^2 = -b, & \hat{A}_2^2 &= (-1)^{2+2} \bar{A}_2^2 = a. \end{aligned}$$

□

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\bar{A}_1^1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, \quad \bar{A}_2^1 = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, \quad \bar{A}_3^1 = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{A}_3^3 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_1^1 &= (-1)^{1+1} \bar{A}_1^1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, & \hat{A}_2^1 &= (-1)^{1+2} \bar{A}_2^1 = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, \\ \hat{A}_3^1 &= (-1)^{1+3} \bar{A}_3^1 = -\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, & \hat{A}_3^3 &= (-1)^{3+3} \bar{A}_3^3 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

Tvrzení 2.2.11 (Laplaceova věta o rozvoji determinantu). *Bud' A matice typu $n \times n$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\begin{aligned} \det A &= A_1^i \hat{A}_1^i + A_2^i \hat{A}_2^i + \dots + A_n^i \hat{A}_n^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \hat{A}_j^i = \\ &= A_i^1 \hat{A}_i^1 + A_i^2 \hat{A}_i^2 + \dots + A_i^n \hat{A}_i^n = \sum_{j=1}^n A_i^j \hat{A}_i^j. \end{aligned}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & \dots & A_{j-1}^i & A_j^i & A_{j+1}^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = & \quad (\text{Lemma 2.2.2}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_j^i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{j=1}^n A_j^i \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ukažme, že

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \hat{A}_j^i.$$

Vyměňujeme i -tý řádek $(0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ s předchozími řádky tak dlouho, až bude prvním řádkem; k tomu je potřeba $i - 1$ výměn. Poté vyměňujeme j -tý sloupek $(1 \ A_j^1 \dots A_j^{i-1} \ A_j^{i+1} \dots A_j^n)^\top$ s předchozími sloupky tak dlouho, až bude prvním sloupkem; k tomu je potřeba $j - 1$ výměn. Takto vzniklý determinant je tedy nutné vynásobit číslem $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i+j}$ a navíc, viz Lemma 2.2.10, se rozpadá na subdeterminanty $\det(1)$ a $\hat{A}_j^i$. Proto $\det A = \sum_{j=1}^n A_j^i \cdot (-1)^{i+j} \hat{A}_j^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \hat{A}_j^i$ a máme rozvoj podle i -tého řádku.

Rozvoj podle i -tého sloupku získáme analogicky. $\square$

Definice 2.2.4. Vztah v Laplaceově větě je *Laplaceův rozvoj podle i -tého řádku* resp. *podle i -tého sloupku*.

Příklad.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \\
 &= 8 + (-2) = 6
 \end{aligned}$$

$\square$

2.3. Adjungovaná matice

Definice 2.3.1. Buď A čtvercová matice. Označme $\hat{A}$ matici kofaktorů $\hat{A}_j^i$. Matice $\hat{A}^\top$ je matice *adjungovaná* k matici A a značí se $\text{adj } A$. Tedy,

$$\text{adj } A = \hat{A}^\top.$$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\text{adj } A = \hat{A}^\top = \begin{pmatrix} \hat{A}_1^1 & \hat{A}_2^1 \\ \hat{A}_1^2 & \hat{A}_2^2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad \square$$

Tvrzení 2.3.1. Pro libovolnou čtvercovou matici A

$$\det A \cdot E = A \cdot \text{adj } A = \text{adj } A \cdot A.$$

Je-li A regulární matice, pak

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A.$$

Důkaz. V i -tém řádku a j -tém sloupku matice $A \cdot \text{adj } A$ je

$$(A \cdot \text{adj } A)_j^i = \sum_k A_k^i (\hat{A}^\top)_j^k = \sum_k A_k^i \hat{A}_k^j.$$

Pro $i = j$ podle Laplaceovy věty

$$(A \cdot \text{adj } A)_i^i = \sum_k A_k^i \hat{A}_k^i = \det A.$$

Je-li $i \neq j$, buď B matice, která z A vznikne tím, že j -tý řádek nahradíme i -tým řádkem. Potom

$$\begin{aligned} (A \cdot \text{adj } A)_j^i &= \sum_k A_k^i \hat{A}_k^j = && (B \text{ se liší od } A \text{ jen v } j\text{-tém řádku}) \\ &= \sum_k B_k^i \hat{A}_k^j = && (B_k^i = A_k^i) \\ &= \sum_k B_k^j \hat{A}_k^j = && (\text{podle Laplaceovy věty}) \\ &= \det B = && (B \text{ má dva stejné řádky}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Matice $A \cdot \text{adj } A$ je tedy diagonální a všechny prvky na diagonále jsou rovny $\det A$, čili

$$A \cdot \text{adj } A = \det A \cdot E.$$

Rovnost $\text{adj } A \cdot A = \det A \cdot E$ dostaneme analogicky.

Je-li A regulární, pak $\det A \neq 0$, takže jím můžeme dělit a s použitím Tvrzení 1.4.3 dostaneme uvedený vztah. $\square$

Příklad. Mějme regulární matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Například pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

dostaneme

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

3. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

3.1. Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení

Definice 3.1.1. Buďte $n \in \mathbb{N}$, P pole, $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in P$, $x^1, x^2, \dots, x^n \notin P$. Potom

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = b$$

je *lineární rovnice nad polem P o n neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$* (nejsou to mocniny, jen horní indexy). Prvky $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in P$ jsou *koefficienty*.

Uvedenou lineární rovnici můžeme zapsat

$$\sum_{j=1}^n a_j x^j = b.$$

Definice 3.1.2. *Řešení rovnice*

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = b$$

je každá uspořádaná n -tice $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ prvků pole P taková, že platí rovnost

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n = b.$$

Při hledání řešení rovnice tedy hledáme prvky $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ pole P takové, že po dosazení ξ^i za x^i pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se z rovnice stane rovnost.

Příklad. Nechť P je pole reálných čísel $\mathbb{R}$.

$$1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 4 \cdot x^4 = 6$$

je lineární rovnice o čtyřech neznámých x^1, x^2, x^3, x^4 . Řešení této rovnice jsou například $(6, 0, 1, 0)$, $(2, 2, 7, 0)$, $(-4, 3, 0, 1)$, ale nejsou to zdaleka všechna řešení. $\square$

Tvrzení 3.1.1. *Buď $ax = b$ lineární rovnice nad polem P o jedné neznámé x .*

- (1) *Pokud $a \neq 0$, potom $ax = b$ má právě jedno řešení, a to $\xi = ba^{-1}$.*
- (2) *Pokud $a = 0$ a $b \neq 0$, potom $ax = b$ nemá řešení.*
- (3) *Pokud $a = b = 0$, potom každý prvek pole P je řešením $ax = b$.*

Důkaz. (1) Dosadíme-li $\xi = ba^{-1}$ za x , dostaneme $a\xi = aba^{-1} = b$, takže ξ je řešení.

Na druhou stranu, je-li ξ nějaké řešení, tedy $a\xi = b$, pak $\xi = \xi \cdot 1 = \xi(aa^{-1}) = (\xi a)a^{-1} = (a\xi)a^{-1} = ba^{-1}$. Čili každé řešení je rovno ba^{-1} a je tedy jediné.

(2) a (3) Vyplývá z toho, že $0 \cdot x = 0$ pro každé $x \in P$, viz kapitola 6. $\square$

Příklad. Rovnice $3x = 6$ nad polem reálných čísel má jediné řešení $6 \cdot 3^{-1} = 2$. $\square$

Definice 3.1.3. Buďte $m, n, i, j \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, P pole, pro každé i, j necht' $a_j^i, b^i \in P$, $x^1, x^2, \dots, x^n \notin P$. Potom

$$a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \dots + a_n^1x^n = b^1$$

$$a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \dots + a_n^2x^n = b^2$$

$\vdots$

$$a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \dots + a_n^mx^n = b^m$$

je *soustava m lineárních rovnic nad polem P o n neznámých $x^1, \dots, x^n$* .

Uvedenou soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat

$$\sum_{j=1}^n a_j^i x^j = b^i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Označíme-li

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu lineárních rovnic psát jako rovnici

$$Ax = b.$$

Definice 3.1.4. Matice $A = (a_j^i)_{m \times n}$ je *matice soustavy*, $b = (b^i)_{m \times 1}$ je *sloupek pravých stran*, $x = (x^i)_{n \times 1}$ je *sloupek neznámých*. Matice

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}$$

je *rozšířená matice soustavy*. $\bar{A}$ se někdy značí $(A | b)$ nebo $(a_j^i | b^i)$.

Definice 3.1.5. *Řešení soustavy*

$$a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = b^1$$

$$a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = b^2$$

$$\vdots$$

$$a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = b^m$$

m lineárních rovnic nad polem P o n neznámých je každá uspořádaná n -tice $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ prvků pole P taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ platí rovnost

$$a_1^i \xi^1 + a_2^i \xi^2 + \dots + a_n^i \xi^n = b^i,$$

nebo při maticovém zápisu je to sloupková matice $\xi = (\xi^1 \quad \xi^2 \quad \dots \quad \xi^n)^\top$ taková, že platí rovnost

$$A\xi = b.$$

Součin Ax si můžeme rozepsat

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n \end{pmatrix} = \\ &= x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} = \\ &= x^1 A_1^\circ + x^2 A_2^\circ + \dots + x^n A_n^\circ \end{aligned}$$

a soustavu $Ax = b$ pak můžeme přepsat

$$x^1 A_1^\circ + x^2 A_2^\circ + \cdots + x^n A_n^\circ = b.$$

Tedy, soustava lineárních rovnic $Ax = b$ má řešení právě tehdy, když existuje lineární kombinace sloupků matice A , která je rovna sloupku pravých stran b . Koeficienty takových lineárních kombinací tvoří jednotlivá řešení soustavy.

Jestliže soustava lineárních rovnic má nějaké řešení, tj. sloupek pravých stran je nějakou lineární kombinací sloupků matice soustavy, potom hodnota rozšířené matice soustavy je rovna hodnotě matice soustavy. Jestliže soustava nemá řešení, tj. sloupek pravých stran není lineární kombinací sloupků matice soustavy, potom hodnota rozšířené matice soustavy je o 1 větší než hodnota matice soustavy.

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy.

Příklad. (1) Řešení lineární rovnice

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 = b$$

s reálnými koeficienty o dvou neznámých x^1, x^2 jsou uspořádané dvojice (ξ^1, ξ^2) reálných čísel takové, že po jejich dosazení do rovnice za neznámé dostaneme rovnost. Množina všech řešení takové rovnice je tedy

$$\{(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \xi^1 + a_2 \xi^2 = b\}$$

a bereme-li uspořádané dvojice jako body v rovině, tato množina je

- prázdná, tj. rovnice nemá řešení — pokud $a_1 = a_2 = 0$ a $b \neq 0$;
- přímka, tj. rovnice má nekonečně mnoho řešení — pokud aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2 je nenulový;
- celá rovina, tj. rovnice má nekonečně mnoho řešení — pokud $a_1 = a_2 = b = 0$.

Je-li to přímka procházející dvěma body $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ a označíme-li $w = u - v$, můžeme ji zapsat také parametricky

$$\begin{aligned} \{u + tw \mid t \in \mathbb{R}\} &= \{(u_1, u_2) + t(w_1, w_2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(u_1 + tw_1, u_2 + tw_2) \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(2) Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic. Taková množina je tedy

- prázdná — pokud buď aspoň jedna rovnice nemá řešení, nebo množiny všech řešení dvou rovnic jsou rovnoběžné přímky, nebo množiny všech řešení tří rovnic jsou přímky s prázdným průnikem;
- jednoprvková — pokud množiny všech řešení dvou rovnic jsou přímky s jednoprvkovým průnikem, jehož prvek je řešením i všech ostatních rovnic soustavy;
- přímka — pokud to není celá rovina a všechny množiny všech řešení jednotlivých rovnic různé od celé roviny jsou tatáž přímka, tedy všechny rovnice jsou násobky jedné z nich;
- celá rovina — pokud všechny rovnice mají všechny koeficienty i pravé strany nulové, tedy $a_1^i = a_2^i = b^i = 0$ pro každé i .

(3) Řešení lineární rovnice o třech neznámých jsou uspořádané trojice, po jejichž dosazení do rovnice dostaneme rovnost, a bereme-li uspořádané trojice jako body v trojrozměrném prostoru, množina všech řešení je

- prázdná — pokud $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ a $b \neq 0$;
- rovina — pokud aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 je nenulový;
- celý trojrozměrný prostor — pokud $a_1 = a_2 = a_3 = b = 0$.

A také rovinu v prostoru můžeme vyjádřit parametricky.

(4) Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o třech neznámých může být

- prázdná;
 - jednoprvková;
 - přímka;
 - rovina;
 - celý trojrozměrný prostor.
- (5) Řešení lineární rovnice o n neznámých jsou uspořádané n -tice a množina všech řešení je
- prázdná;
 - „ $(n - 1)$ -rozměrná rovina“, nazývá se *nadrovina* v n -rozměrném prostoru;
 - celý n -rozměrný prostor.

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o n neznámých je tedy případně průnik nadrovin v n -rozměrném prostoru. $\square$

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned}x^1 + 2x^2 - x^3 &= 1 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 1 \\ 2x^1 - x^2 + x^3 &= 1\end{aligned}$$

má právě jedno řešení, $(0,5,0,5,0,5)$, tj. $\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0,5$. Množina všech řešení je $\{(0,5,0,5,0,5)\}$.

(2) Mějme soustavu

$$x - y = 1,$$

tedy jednu rovnici o dvou neznámých x, y . Každá uspořádaná dvojice $(t, t - 1)$, kde t je libovolné reálné číslo, je řešení soustavy, tj. $\xi^1 = t, \xi^2 = t - 1$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení a množina všech řešení je $\{(t, t - 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(3) Soustava

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ x &= 1\end{aligned}$$

nemá žádné řešení, množina všech řešení je tedy prázdná množina $\emptyset$. $\square$