

1.5. Hodnost matice

1.5.1. Lineární nezávislost

Stejně jako v případě lineární kombinace v Definici 1.2.3 následující definice a tvrzení formulujeme pouze pro řádky matice, ale vše lze obdobně formulovat pro sloupky, uspořádané n -tice a matice.

Definice 1.5.1. Množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je *lineárně nezávislá*, jestliže pro libovolné $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ z rovnosti

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + c_2 A_{\circ}^{i_2} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ} \quad \text{vyplývá} \quad c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0,$$

tj. nulový řádek získáme jedinečně takovou lineární kombinací daných řádků, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule.

Množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá. Tedy, existují $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ taková, že aspoň jedno z nich je nenulové a přitom

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + c_2 A_{\circ}^{i_2} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ}.$$

Tvrzení 1.5.1. Množina řádků je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

Důkaz. Předpokládejme, že množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je lineárně závislá. Existují tedy koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ takové, že aspoň jeden z nich je nenulový (například c_j) a $c_1 A_{\circ}^{i_1} + \dots + c_j A_{\circ}^{i_j} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ}$. Potom

$$\begin{aligned} c_j A_{\circ}^{i_j} &= -c_1 A_{\circ}^{i_1} - \dots - c_{j-1} A_{\circ}^{i_{j-1}} - c_{j+1} A_{\circ}^{i_{j+1}} - \dots - c_k A_{\circ}^{i_k}, \\ A_{\circ}^{i_j} &= -\frac{c_1}{c_j} A_{\circ}^{i_1} - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j} A_{\circ}^{i_{j-1}} - \frac{c_{j+1}}{c_j} A_{\circ}^{i_{j+1}} - \dots - \frac{c_k}{c_j} A_{\circ}^{i_k} \end{aligned}$$

a řádek $A_{\circ}^{i_j}$ je tedy lineární kombinací ostatních řádků.

Předpokládejme, že například řádek $A_{\circ}^{i_j}$ je lineární kombinací ostatních řádků, tedy

$$A_{\circ}^{i_j} = c_1 A_{\circ}^{i_1} + \dots + c_{j-1} A_{\circ}^{i_{j-1}} + c_{j+1} A_{\circ}^{i_{j+1}} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k}.$$

Potom

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + \dots + c_{j-1} A_{\circ}^{i_{j-1}} - A_{\circ}^{i_j} + c_{j+1} A_{\circ}^{i_{j+1}} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ}$$

a zároveň $c_j = -1$. Takže množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je lineárně závislá. $\square$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} c_2 + c_3 & c_1 + 2c_2 & 2c_1 + 3c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

a to je možné jedině v případě, že $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých c_1, c_2, c_3 a získáme jediné, nulové řešení).

Množina řádků matice A je tedy lineárně nezávislá. $\square$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c_2 + 2c_3 & c_1 + 2c_2 + c_3 & 2c_1 + 3c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soustava

$$\begin{aligned} c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 0 \end{aligned}$$

má kromě nulového i nenulové řešení (například $c_1 = 3, c_2 = -2, c_3 = 1$). Množina řádků matice A je tedy lineárně závislá. $\square$

Příklad. (1) Množina řádků jednotkové matice je lineárně nezávislá. Ověřte.

(2) Množina řádků, z nichž aspoň jeden je nulový, je lineárně závislá. Ověřte.

(3) Jednoprvková množina obsahující řádek $A_{\circ}^i$ je lineárně nezávislá, jestliže $cA_{\circ}^i = 0$, plyne $c = 0$. Tedy, jednoprvková množina obsahující jeden řádek je lineárně nezávislá, jestliže ten řádek je nenulový, a je lineárně závislá, jestliže ten řádek je nulový.

(4) Množina obsahující jen řádky $A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}$ je lineárně závislá právě tehdy, když jeden z řádků je násobkem druhého z řádků (existuje $c \in P$ takové, že $A_{\circ}^{i_1} = cA_{\circ}^{i_2}$).

(5) Prázdná množina řádků je lineárně nezávislá. $\square$

1.5.2. Hodnost matice

Definice 1.5.2. *Hodnost* matice je maximální počet prvků lineárně nezávislé množiny jejích řádků. Hodnost matice A značíme $\text{rank } A$.

Mějme matici A typu $m \times n$ s řádky $A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m$. Vezmeme všechny možné množiny těchto řádků, čili prázdnou množinu $\emptyset$, jednoprvkové množiny $\{A_{\circ}^1\}, \{A_{\circ}^2\}, \dots, \{A_{\circ}^m\}$, dvouprvkové množiny $\{A_{\circ}^1, A_{\circ}^2\}, \dots, \{A_{\circ}^{m-1}, A_{\circ}^m\}$, ..., až množinu $\{A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m\}$. Z těchto množin vybereme ty, které jsou lineárně nezávislé. U každé z nich si poznamenáme počet prvků a maximální z těchto počtů je hodnost matice A .

Hodnost matice s m řádky je tedy jedno z čísel $0, 1, \dots, m$.

Příklad. (1) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je rovna 3. Ověřte.

(2) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je rovna 2. Ověřte.

(3) Hodnost nulové matice je rovna 0, hodnost nenulové matice je kladná.

(4) Hodnost diagonální matice je rovna počtu jejích nenulových řádků. $\square$

Cvičení. Spočítejte hodnosti matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\square$

Tvrzení 1.5.2. Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Důkaz. Buď A matice ve schodovitém tvaru, která má m řádků, z nichž p je nenulových. Množina všech nenulových řádků je lineárně nezávislá (cvičení), takže $\text{rank } A \geq p$. Jestliže $m = p$, hodnost větší být nemůže. Jestliže $m > p$, pak každá množina s více než p řádků obsahuje aspoň jeden nulový řádek, a je tedy lineárně závislá, takže i v tomto případě $\text{rank } A = p$. $\square$

Podle následujícího tvrzení je množina řádků lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá množina řádků vzniklá provedením řádkové nebo sloupkové elementární úpravy původní množiny řádků.

Tvrzení 1.5.3. Buďte $A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m$ řádky. Nechtě $B_{\circ}^1, B_{\circ}^2, \dots, B_{\circ}^m$ jsou řádky, které z řádků $A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m$ vzniknou provedením jedné řádkové nebo sloupkové elementární úpravy. Potom množina řádků $\{A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m\}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina řádků $\{B_{\circ}^1, B_{\circ}^2, \dots, B_{\circ}^m\}$ je lineárně nezávislá.

Důkaz. (1) Nechtě došlo k přičtení c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku, kde $i \neq j$. Tedy, $B_{\circ}^i = A_{\circ}^i + cA_{\circ}^j$ a $B_{\circ}^k = A_{\circ}^k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $\{A_o^1, A_o^2, \dots, A_o^m\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B_o^1 + \dots + c_m B_o^m = 0_o$. Pak

$$\begin{aligned} 0_o &= c_1 B_o^1 + \dots + c_m B_o^m = \\ &= c_1 A_o^1 + \dots + c_i (A_o^i + c A_o^j) + \dots + c_j A_o^j + \dots + c_m A_o^m = \\ &= c_1 A_o^1 + \dots + c_i A_o^i + \dots + (c_j + c c_i) A_o^j + \dots + c_m A_o^m. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{A_o^1, A_o^2, \dots, A_o^m\}$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $c_1 = \dots = c_i = \dots = c_j + c c_i = \dots = c_m = 0$. Z toho dostaneme, že i $c_j = 0$, a množina $\{B_o^1, B_o^2, \dots, B_o^m\}$ je lineárně nezávislá.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A_o^1, A_o^2, \dots, A_o^m$ vzniknou z řádků $B_o^1, B_o^2, \dots, B_o^m$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

(2) Necht' došlo k přičtení c -násobku j -tého sloupku k i -tému sloupku, kde $i \neq j$. Pak pro každé $k \in \{1, \dots, m\}$ je $B_i^k = A_i^k + c A_j^k$ a $B_l^k = A_l^k$ pro $l \neq i$. Tedy $B_o^k = (A_1^k \dots A_i^k + c A_j^k \dots A_j^k \dots A_n^k)$.

Předpokládejme, že $\{A_o^1, A_o^2, \dots, A_o^m\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B_o^1 + \dots + c_m B_o^m = 0_o$. Takže

$$\begin{aligned} c_1 B_o^1 + \dots + c_m B_o^m &= \\ &= (\sum_k c_k A_1^k \dots \sum_k c_k (A_i^k + c A_j^k) \dots \sum_k c_k A_j^k \dots \sum_k c_k A_n^k) = \\ &= (\sum_k c_k A_1^k \dots \sum_k c_k A_i^k + c \sum_k c_k A_j^k \dots \sum_k c_k A_j^k \dots \sum_k c_k A_n^k) = \\ &= (0 \dots 0 \dots 0 \dots 0) \end{aligned}$$

a z toho dostaneme

$$\sum_k c_k A_1^k = \dots = \sum_k c_k A_i^k = \dots = \sum_k c_k A_j^k = \dots = \sum_k c_k A_n^k = 0.$$

Pak

$$\begin{aligned} (\sum_k c_k A_1^k \dots \sum_k c_k A_2^k \dots \sum_k c_k A_n^k) &= \sum_k c_k (A_1^k \ A_2^k \dots A_n^k) = \\ &= \sum_k c_k A_o^k = c_1 A_o^1 + \dots + c_m A_o^m = 0_o. \end{aligned}$$

a z lineární nezávislosti množiny $\{A_o^1, A_o^2, \dots, A_o^m\}$ dostaneme $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$. Množina $\{B_o^1, B_o^2, \dots, B_o^m\}$ je tedy lineárně nezávislá.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A_o^1, A_o^2, \dots, A_o^m$ vzniknou z řádků $B_o^1, B_o^2, \dots, B_o^m$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy je důkaz obdobný a ponecháme ho jako cvičení. $\square$

Důsledek. (1) *Hodnota matice je rovna hodnotě matice z ní vzniklé provedením elementární úpravy.*

(2) *Provedení konečně mnoha elementárních úprav nemění hodnotu.*

(3) *Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zleva nemění hodnotu.*

(4) *Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zprava nemění hodnotu.*

(5) *Ekvivalentní matice mají stejnou hodnotu.*

(6) *Hodnota matice je rovna počtu nenulových řádků ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru.*

(7) *Hodnota matice je rovna počtu nenulových řádků (sloupků) ekvivalentní matice v Gaussově kanonickém tvaru.*

(8) Maximální počet prvků lineárně nezávislých množin sloupků matice je roven maximálnímu počtu prvků lineárně nezávislých množin jejích řádků, tj. hodnoti matice.

(9) $\text{rank } A = \text{rank } A^T$.

Příklad. Spočítejme hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takže $\text{rank } A = 3$. □

Příklad. Spočítejme hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takže $\text{rank } A = 2$. □

Definice 1.5.3. Čtvercová matice je *regulární*, jestliže její hodnota je rovna počtu jejích řádků (tedy množina všech jejích řádků je lineárně nezávislá). Čtvercová matice je *singulární*, jestliže není regulární.

Příklad. (1) Všechny jednotkové matice jsou regulární.

(2) Všechny elementární matice jsou regulární.

(3) Všechny čtvercové matice s aspoň jedním nulovým řádkem jsou singulární. □

Tvrzení 1.5.4. Matice je regulární právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. (1) Matice je invertibilní právě tehdy, když je regulární.

(2) Regulární matice je součinem konečně mnoha elementárních matic.

(3) Součin regulárních matic je regulární matice.

(4) Vynásobení regulární maticí zleva nemění hodnotu.

(5) Vynásobení regulární maticí zprava nemění hodnotu.

Tvrzení 1.5.5. Buďte A, B čtvercové matice stejného typu. Obě matice A, B jsou regulární právě tehdy, když matice AB je regulární.

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Tato implikace je součástí předchozího Důsledku.

„ $\Leftarrow$ “ Dokážeme, že je-li aspoň jedna z matic A, B singulární, pak AB je singulární. Nechť A je singulární. Ekvivalentní matice $S = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou elementární matice, ve schodovitém tvaru, má nulový řádek. Potom matice SB má také nulový řádek, je tedy singulární a řádkově ekvivalentní matice $AB = Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} SB$, která má stejnou hodnotu, je také singulární.

Pro B singulární je důkaz analogický a ponecháme ho jako cvičení. $\square$

Tvrzení 1.5.6. *Bud'te A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$. Potom $\text{rank } AB \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$.*

Důkaz. Matici A převedeme pomocí řádkových elementárních úprav na schodovitý tvar $S_A = Q_k \cdots Q_1 A$ a matici B převedeme pomocí sloupkových elementárních úprav na tvar $S_B = B P_1 \cdots P_l$ takový, že S_B^T je ve schodovitém tvaru.

Potom $\text{rank } AB = \text{rank } Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} S_A S_B P_l^{-1} \cdots P_1^{-1} = \text{rank } S_A S_B$, přičemž matice $S_A S_B$ má minimálně tolik nulových řádků, kolik jich má matice S_A , a minimálně tolik nulových sloupků, kolik jich má matice S_B . Tedy $\text{rank } S_A S_B \leq \text{rank } S_A = \text{rank } A$ a $\text{rank } S_A S_B \leq \text{rank } S_B = \text{rank } B$. $\square$

Cvičení. Co se dá říct o $\text{rank}(A + B)$? $\square$

2. DETERMINANT

2.1. Permutace

Definice 2.1.1. Bud' M konečná množina. *Permutace* na množině M je bijekce $M \rightarrow M$.

Bud' σ permutace na množině M a $m \in M$. Obraz $\sigma(m)$ prvku m při permutaci σ se často značí σ_m .

Definice 2.1.2. *Transpozice* je permutace, při níž se vzájemně vymění dva prvky a ostatní se nezmění.

Tvrzení 2.1.1. *Každá permutace je složením konečně mnoha transpozic.*

Nechť $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Množinu všech permutací na množině I_n značíme S_n . Permutaci $\sigma \in S_n$ můžeme zapisovat jako uspořádanou n -tici obrazů prvků množiny I_n , tedy $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Definice 2.1.3. Bud' $\sigma \in S_n$. Nechť $i, j \in I_n$ jsou takové, že $i < j$ a $\sigma_i > \sigma_j$. Pak dvojice (σ_i, σ_j) tvoří *inverzi* permutace σ .

Počet inverzí permutace σ značíme $\text{inv } \sigma$. Je zřejmé, že $\text{inv } \sigma = \text{inv } \sigma^{-1}$.

Definice 2.1.4. *Signum (znaménko)* permutace $\sigma \in S_n$ je $\text{sgn } \sigma = (-1)^{\text{inv } \sigma}$. Permutace s $\text{sgn } \sigma = 1$ je *sudá*, permutace s $\text{sgn } \sigma = -1$ je *lichá*.

Jelikož $\text{inv } \sigma = \text{inv } \sigma^{-1}$, $\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}$.

Tvrzení 2.1.2. *Bud'te $\rho, \sigma \in S_n$. Pak $\text{sgn}(\pi \circ \rho) = \text{sgn } \pi \cdot \text{sgn } \rho$.*

Cvičení. Ukažte, že každá transpozice je lichá permutace. □

Více o permutacích lze najít například v [Marvan, 4. Permutace].

2.2. Determinant

2.2.1. Definice a determinanty některých typů matic

Definice 2.2.1. Bud' A matice typu $n \times n$ nad polem P . *Determinant* matice A je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n \in P.$$

Číslo n je *řád* determinantu.

Pro determinant matice A se používá značení

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Díky tomu, že σ je permutace (bijektivní zobrazení) na množině I_n , můžeme ji chápat jako zobrazení z množiny všech řádkových indexů do množiny všech sloupkových indexů

matice A . Ke každému řádku je tedy vzájemně jednoznačně přiřazen sloupek a v každém součinu $A_{\sigma_1}^1 \cdot A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n$ je tedy právě jeden prvek z každého řádku a právě jeden prvek z každého sloupku. Determinant matice A je tedy součet všech takovýchto součinů (pro všechny permutace σ na množině I_n) opatřených buď znaménkem $+$, jde-li o sudou permutaci, nebo znaménkem $-$, jde-li o lichou permutaci.

Příklad. (1) Nechť $n = 1$. Tedy, $I_1 = \{1\}$, $S_1 = \{\text{id}: \{1\} \rightarrow \{1\}\}$ a $\text{sgn id} = 1$. Pro matici $A = (a)$ je $\det A = \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 = 1 \cdot A_1^1 = a$.

(2) Nechť $n = 2$. Tedy, $I_2 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{\text{id}, \tau\}$, kde $\text{id} = (1, 2)$ a $\tau = (2, 1)$ (viz zápis permutace na I_n), $\text{sgn id} = 1$ a $\text{sgn } \tau = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je $\det A = \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 A_{\text{id}_2}^2 + \text{sgn } \tau \cdot A_{\tau_1}^1 A_{\tau_2}^2 = 1 \cdot A_1^1 A_2^2 + (-1) \cdot A_2^1 A_1^2 = ad - bc$. Vzorec pro výpočet determinantu matice druhého řádu je možno odvodit z následujícího obrázku:

$$\begin{array}{c} \oplus \quad \ominus \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{vmatrix} \end{array} = A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2$$

(3) Nechť $n = 3$. Tedy, $I_3 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{\text{id}, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, kde $\text{id} = (1, 2, 3)$, $\sigma_1 = (2, 3, 1)$, $\sigma_2 = (3, 1, 2)$, $\tau_1 = (1, 3, 2)$, $\tau_2 = (3, 2, 1)$, $\tau_3 = (2, 1, 3)$ (viz zápis permutace na I_n), $\text{sgn id} = \text{sgn } \sigma_1 = \text{sgn } \sigma_2 = 1$ a $\text{sgn } \tau_1 = \text{sgn } \tau_2 = \text{sgn } \tau_3 = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

je

$$\begin{aligned} \det A &= \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 A_{\text{id}_2}^2 A_{\text{id}_3}^3 + \text{sgn } \sigma_1 \cdot A_{\sigma_1(1)}^1 A_{\sigma_1(2)}^2 A_{\sigma_1(3)}^3 + \\ &\quad + \text{sgn } \sigma_2 \cdot A_{\sigma_2(1)}^1 A_{\sigma_2(2)}^2 A_{\sigma_2(3)}^3 + \text{sgn } \tau_1 \cdot A_{\tau_1(1)}^1 A_{\tau_1(2)}^2 A_{\tau_1(3)}^3 + \\ &\quad + \text{sgn } \tau_2 \cdot A_{\tau_2(1)}^1 A_{\tau_2(2)}^2 A_{\tau_2(3)}^3 + \text{sgn } \tau_3 \cdot A_{\tau_3(1)}^1 A_{\tau_3(2)}^2 A_{\tau_3(3)}^3 = \\ &= 1 \cdot A_1^1 A_2^2 A_3^3 + 1 \cdot A_2^1 A_3^2 A_1^3 + 1 \cdot A_3^1 A_1^2 A_2^3 + \\ &\quad + (-1) \cdot A_1^1 A_3^2 A_2^3 + (-1) \cdot A_3^1 A_2^2 A_1^3 + (-1) \cdot A_2^1 A_1^2 A_3^3 = \\ &= aei + bfg + cdh - afh - ceg - bdi. \end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet determinantu matice třetího řádu lze odvodit z následujícího obrázku pomocí *Sarrusova pravidla* (pro matice vyššího řádu žádné takové pravidlo neexistuje):

$$= A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_2^1 A_3^2 A_1^3 + A_3^1 A_1^2 A_2^3 - A_1^1 A_3^2 A_2^3 - A_3^1 A_2^2 A_1^3 - A_2^1 A_1^2 A_3^3$$

(4) Nechť $n = 4$. Na čtyřprvkové množině existují 24 permutace, takže při výpočtu determinantu podle definice dostaneme 24 sčítance. Uvedeme si i jiné způsoby výpočtu determinantu. $\square$

Cvičení. Spočítejte determinanty matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \square$$

Tvrzení 2.2.1. *Determinant matice s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem je roven nule.*

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$ s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem. Pro každé $\sigma \in S_n$ je v součinu $A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n$ právě jeden prvek z každého, tedy i nulového řádku a právě jeden prvek z každého, tedy i nulového sloupku. Proto každý takový součin je roven nule. $\square$

Lemma 2.2.2. *Pro matice lišící se pouze v jednom řádku platí*

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^{i-1} & \cdots & A_n^{i-1} \\ A_1^i & \cdots & A_n^i \\ A_1^{i+1} & \cdots & A_n^{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^{i-1} & \cdots & A_n^{i-1} \\ B_1^i & \cdots & B_n^i \\ A_1^{i+1} & \cdots & A_n^{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^{i-1} & \cdots & A_n^{i-1} \\ A_1^i + B_1^i & \cdots & A_n^i + B_n^i \\ A_1^{i+1} & \cdots & A_n^{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Cvičení. $\square$

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 + (-6) + 3 = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$
 $\square$