

1. přednáška, 23. 9. 2025

POLE

Uvažujme množinu všech reálných čísel. Reálná čísla sčítáme a násobíme, přičteme-li k reálnému číslu nulu, dostaneme stejné číslo, vynásobíme-li reálné číslo jedničkou, dostaneme stejné číslo, ke každému reálnému číslu existuje číslo opačné (součet čísla a k němu opačného čísla je roven 0), ke každému nenulovému reálnému číslu existuje číslo inverzní (převrácená hodnota, součin čísla a k němu inverzního čísla je roven 1). Pro libovolná reálná čísla a, b, c navíc platí

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a & (\text{součet a součin jsou komutativní,} \\ a + (b + c) &= (a + b) + c, & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c & \text{asociativní} \\ a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c & & & \text{a splňují distributivní zákon}) \end{aligned}$$

Každá množina obsahující aspoň 2 prvky (obvykle označované 0 a 1) s uvedenými operacemi s uvedenými vlastnostmi se nazývá *pole*. Příkladem pole je *pole komplexních čísel*, které značíme $\mathbb{C}$.

Každá podmnožina množiny komplexních čísel, která obsahuje 0 a 1, s každým číslem obsahuje k němu opačné, s každým nenulovým číslem obsahuje k němu inverzní a s libovolnými dvěma čísly obsahuje jejich součet i součin, se nazývá *číselné pole*.

Příklady číselných polí jsou množina komplexních čísel $\mathbb{C}$, množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Například množina celých čísel $\mathbb{Z}$ a množina přirozených (kladných celých) čísel $\mathbb{N}$ nejsou pole.

Je-li P pole a n přirozené číslo, potom P^n označuje množinu všech uspořádaných n -tic prvků pole P .

Polím se ještě budeme věnovat později, v kapitole 6, ale už před tím budeme využívat některé vlastnosti pole, například, že $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ pro každé x z pole, nebo že součin nenulových prvků pole je také různý od nuly.

1. MATICE

1.1. Matice

Definice 1.1.1. Bud' P pole, buďte m, n přirozená čísla. *Matice* typu $m \times n$ nad polem P je tabulka o m řádcích a n sloupcích obsahující na každém místě nějaký prvek pole P (a nic jiného). Máme-li takovou matici A , pak prvek pole P v i -tém řádku a j -tém sloupcu označujeme A_j^i a matici zapisujeme obvykle

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m & A_2^m & \dots & A_n^m \end{pmatrix}$$

nebo stručněji $A = (A_j^i)_{m \times n}$ nebo jen $A = (A_j^i)$.

Matici typu $m \times n$ nad polem P je možné definovat také jako zobrazení z kartézského součinu $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ do pole P . Takové zobrazení tedy uspořádané dvojici

(i, j) přiřazuje $A_j^i \in P$ a můžeme ho zapsat právě ve tvaru tabulky, která má v i -tém řádku a j -tém sloupku prvek A_j^i .

Horním indexům říkáme *řádkové*, dolním indexům říkáme *sloupkové*. Pro pevně zvolené i

$$A_{\circ}^i = (A_1^i \quad A_2^i \quad \dots \quad A_n^i)$$

je i -tý řádek matice A ; je to tedy matice typu $1 \times n$, někdy ji zapisujeme jako uspořádanou n -tici $(A_1^i, A_2^i, \dots, A_n^i) \in P^n$. Nulový řádek označme $0_{\circ}$. Pro pevně zvolené j

$$A_j^{\circ} = \begin{pmatrix} A_j^1 \\ A_j^2 \\ \vdots \\ A_j^m \end{pmatrix}$$

je j -tý sloupek matice A ; je to tedy matice typu $m \times 1$, někdy ji zapisujeme jako uspořádanou m -tici $(A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^m) \in P^m$ nebo $(A_j^1 \quad A_j^2 \quad \dots \quad A_j^m)^{\top}$ nebo $(A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^m)^{\top}$. Nulový sloupek označme 0° . To, že matice A je tvořena řádky $A_{\circ}^i$, resp. sloupky A_j° , budeme někdy zapisovat

$$A = \begin{pmatrix} A_{\circ}^1 \\ A_{\circ}^2 \\ \vdots \\ A_{\circ}^m \end{pmatrix}, \quad \text{resp. } A = (A_1^{\circ} \quad A_2^{\circ} \quad \dots \quad A_n^{\circ}).$$

Definice 1.1.2. Matice $A = (A_j^i)$ a $B = (B_j^i)$ se vzájemně *rovnají*, jestliže jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky, tedy jsou-li typu $m \times n$ a pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $A_j^i = B_j^i$.

Definice 1.1.3. Matice $A = (A_j^i)_{m \times n}$ je

- *čtvercová*, jestliže $m = n$,
- *diagonální*, jestliže je čtvercová a $A_j^i = 0$ pro $i \neq j$ (prvky A_i^i jsou také *diagonální* a tvoří *hlavní diagonálu*),
- *jednotková*, jestliže je diagonální a $A_i^i = 1$ pro každé i (označujeme ji E_n nebo jen E),
- *nulová*, jestliže má všechny prvky nulové (označujeme ji $0_{m \times n}$ nebo jen 0),
- *horní* resp. *dolní trojúhelníková* (nebo v *horním* resp. *dolním trojúhelníkovém tvaru*), jestliže je čtvercová a pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A_j^i = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$,
- *schodovitá* (nebo ve *schodovitém tvaru*), jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního, začíná zleva více nulami než řádek předchozí,
- v *Gaussově–Jordanově tvaru*, jestliže
 - (i) je ve schodovitém tvaru,
 - (ii) první (zleva) nenulové prvky všech nenulových řádků jsou 1,
 - (iii) ve sloupcích nad (a nejen pod) prvními nenulovými prvky všech nenulových řádků jsou jen 0,
- v *Gaussově kanonickém tvaru*, jestliže je rovna matici

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková matice a 0 označují nulové matice příslušných typů,

- *blokově diagonální*, jestliže je rovna matici

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix},$$

kde $k > 1$, $A_1, \dots, A_k$ jsou čtvercové matice (bloky) a 0 označují nulové matice příslušných typů.

Množinu všech matic typu $m \times n$ nad polem P označujeme $\mathcal{M}_{m \times n}(P)$ nebo $P^{m \times n}$; v případě čtvercových matic také $\mathcal{M}_n(P)$ nebo $\text{gl}(n, P)$.

Příklad. (1)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ je čtvercová matice, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ není čtvercová matice.

(2)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ je diagonální matice, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ není diagonální.

(3)

$E_1 = (1)$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ jsou jednotkové matice.

(4)

$0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ jsou nulové matice.

(5)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ je horní trojúhelníková matice,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ je dolní trojúhelníková matice.

(6)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je matice ve schodovitém tvaru,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ není matice ve schodovitém tvaru.

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ je matice v Gaussově–Jordanově tvaru,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ není matice v Gaussově–Jordanově tvaru.}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ je blokově diagonální matice,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ není blokově diagonální matice.} \quad \square$$

1.2. Operace s maticemi

1.2.1. Součet matic a násobek matice

Definice 1.2.1. Buďte A, B matice typu $m \times n$ nad polem P . *Součet* matic A, B je matice $A + B$ typu $m \times n$ nad polem P taková, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(A + B)_j^i = A_j^i + B_j^i.$$

Sčítáme tedy jen matice stejného typu. Matice různých typů nelze sčítat.

Definice 1.2.2. Buďte A matice typu $m \times n$ nad polem P a $c \in P$. Potom *c-násobek* matice A je matice cA typu $m \times n$ nad polem P taková, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(cA)_j^i = cA_j^i.$$

Pro $c = -1$ se matice $(-1)A$ značí $-A$ a nazývá se *opačná* matice k matici A .

Příklad. Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + 0 & 3 + 2 \\ 4 + 1 & 5 + (-3) & 6 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix},$$

$$6A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \end{pmatrix}, \quad -B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Cvičení. Spočtěte

$$\begin{array}{ll}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.
 \end{array}
 \quad \square$$

Tvrzení 1.2.1. *Nechť A, B, C jsou matice stejného typu nad polem P a $c, k \in P$. Pak*

- | | |
|----------------------------------|---------------------------|
| (1) $A + B = B + A,$ | (5) $1A = A,$ |
| (2) $A + (B + C) = (A + B) + C,$ | (6) $c(A + B) = cA + cB,$ |
| (3) $A + 0 = A,$ | (7) $(c + k)A = cA + kA,$ |
| (4) $A + (-A) = 0,$ | (8) $c(kA) = (ck)A.$ |

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodů (2) a (6), ostatní ponecháme jako cvičení.

(2) Máme dokázat, že matice $A + (B + C)$ se rovná matici $(A + B) + C$. Předpokládejme, že A, B, C jsou typu $m \times n$. Potom i $B + C$ a $A + B$ jsou typu $m \times n$, a tedy i $A + (B + C)$ a $(A + B) + C$ jsou typu $m \times n$.

Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ prvek v i -tém řádku a j -tém sloupku matice $A + (B + C)$ je

$$\begin{aligned}
 (A + (B + C))_j^i &= && \text{(podle definice součtu matic)} \\
 &= A_j^i + (B + C)_j^i = && \text{(podle definice součtu matic)} \\
 &= A_j^i + (B_j^i + C_j^i) = && \text{(díky asociativitě sčítání v poli)} \\
 &= (A_j^i + B_j^i) + C_j^i = && \text{(podle definice součtu matic)} \\
 &= (A + B)_j^i + C_j^i = && \text{(podle definice součtu matic)} \\
 &= ((A + B) + C)_j^i,
 \end{aligned}$$

což je prvek v i -tém řádku a j -tém sloupku matice $(A + B) + C$.

Dokázali jsme, že matice $A + (B + C)$ a $(A + B) + C$ jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky.

(6) Máme dokázat, že matice $c(A + B)$ se rovná matici $cA + cB$. Předpokládejme, že A, B jsou typu $m \times n$. Potom i $A + B$, cA a cB jsou typu $m \times n$, a tedy i $c(A + B)$ a $cA + cB$ jsou typu $m \times n$.

Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ prvek v i -tém řádku a j -tém sloupku matice $c(A + B)$ je

$$\begin{aligned}
 (c(A + B))_j^i &= && \text{(podle definice } c\text{-násobku matice)} \\
 &= c(A + B)_j^i = && \text{(podle definice součtu matic)} \\
 &= c(A_j^i + B_j^i) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\
 &= cA_j^i + cB_j^i = && \text{(podle definice } c\text{-násobku matice)} \\
 &= (cA)_j^i + (cB)_j^i = && \text{(podle definice součtu matic)} \\
 &= (cA + cB)_j^i,
 \end{aligned}$$

což je prvek v i -tém řádku a j -tém sloupku matice $cA + cB$.

Dokázali jsme, že matice $c(A+B)$ a $cA+cB$ jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky. $\square$

Uvedli jsme si, že řádky a sloupky matice chápeme jako matice. Můžeme je tedy také násobit prvky příslušného pole, můžeme sčítat řádky a sčítat sloupky, jsou-li stejného typu a nad stejným polem.

Následující definici formulujeme pouze pro řádky matice, ale obdobně ji lze formulovat pro sloupky, uspořádané n -tice a matice.

Definice 1.2.3. Buďte $A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}$ řádky matice nad polem P , $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$. *Lineární kombinace* řádků $A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}$ s *koefficienty* $c_1, c_2, \dots, c_k$ je řádek

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + c_2 A_{\circ}^{i_2} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = \sum_{j=1}^k c_j A_{\circ}^{i_j}.$$

Máme-li prázdnou množinu řádků (tedy, nemáme žádný řádek), jejich lineární kombinaci definujeme jako nulový řádek. Takže, nulový řádek je lineární kombinací řádků z prázdné množiny.

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad \begin{aligned} A_{\circ}^1 &= (3 \ 2 \ 1 \ 0) \\ A_{\circ}^2 &= (-1 \ 0 \ 1 \ -1) \\ A_{\circ}^3 &= (0 \ 2 \ -1 \ 0) \\ A_{\circ}^4 &= (1 \ 0 \ 1 \ 0) \\ A_{\circ}^5 &= (-1 \ 0 \ 1 \ 2) \\ A_{\circ}^6 &= (1 \ -1 \ 2 \ 1). \end{aligned}$$

Pro $A_{\circ}^1, A_{\circ}^3, A_{\circ}^6$ a $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 2$ dostaneme

$$\begin{aligned} c_1 A_{\circ}^1 + c_2 A_{\circ}^3 + c_3 A_{\circ}^6 &= \\ &= 2 \cdot (3 \ 2 \ 1 \ 0) + (-1) \cdot (0 \ 2 \ -1 \ 0) + 2 \cdot (1 \ -1 \ 2 \ 1) = \\ &= (6 \ 4 \ 2 \ 0) + (0 \ -2 \ 1 \ 0) + (2 \ -2 \ 4 \ 2) = \\ &= (8 \ 0 \ 7 \ 2). \end{aligned}$$

$\square$

1.2.2. Součin

Definice 1.2.4. Buďte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$ nad polem P . *Součin* matic A, B (v tomto pořadí) je matice $A \cdot B$ (obvykle označovaná jen AB) typu $m \times p$ nad polem P taková, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, p\}$

$$(AB)_j^i = A_1^i B_j^1 + A_2^i B_j^2 + \dots + A_n^i B_j^n = \sum_{k=1}^n A_k^i B_j^k.$$

Matice B má tedy tolik řádků, kolik má matice A sloupků. Prvek matice AB v i -tém řádku a j -tém sloupku získáme tedy tak, že sečteme součiny prvků v i -tém řádku matice

A s odpovídajícími prvky v j -tém sloupku matice B . Tedy

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} A_1^1 B_1^1 + A_2^1 B_1^2 + \dots + A_n^1 B_1^n & \dots & A_1^1 B_p^1 + A_2^1 B_p^2 + \dots + A_n^1 B_p^n \\ A_1^2 B_1^1 + A_2^2 B_1^2 + \dots + A_n^2 B_1^n & \dots & A_1^2 B_p^1 + A_2^2 B_p^2 + \dots + A_n^2 B_p^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^m B_1^1 + A_2^m B_1^2 + \dots + A_n^m B_1^n & \dots & A_1^m B_p^1 + A_2^m B_p^2 + \dots + A_n^m B_p^n \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} A_1^1 B_\circ^1 + A_2^1 B_\circ^2 + \dots + A_n^1 B_\circ^n \\ A_1^2 B_\circ^1 + A_2^2 B_\circ^2 + \dots + A_n^2 B_\circ^n \\ \vdots \\ A_1^m B_\circ^1 + A_2^m B_\circ^2 + \dots + A_n^m B_\circ^n \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} A_\circ^1 B \\ A_\circ^2 B \\ \vdots \\ A_\circ^m B \end{pmatrix} = \\
 &= (B_1^1 A_\circ^1 + B_1^2 A_\circ^2 + \dots + B_1^n A_\circ^n \quad \dots \quad B_p^1 A_\circ^1 + B_p^2 A_\circ^2 + \dots + B_p^n A_\circ^n) = \\
 &= (AB_1^\circ \quad AB_2^\circ \quad \dots \quad AB_p^\circ).
 \end{aligned}$$

Čili, první řádek matice AB získáme tak, že vezmeme A_1^1 -násobek řádku $B_\circ^1$, A_2^1 -násobek řádku $B_\circ^2$, ..., A_n^1 -násobek řádku $B_\circ^n$ a všechny tyto násobky sečteme. Je to tedy lineární kombinace řádků matice B s koeficienty z prvního řádku matice A , jinými slovy, součin prvního řádku matice A , řádek je matice typu $1 \times n$, a matice B .

Obdobně získáme ostatní řádky matice AB . Obecně, i -tý řádek matice AB získáme tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ prvkem A_k^i vynásobíme k -tý řádek matice B a všechny tyto násobky sečteme. Takže i -tý řádek matice AB je lineární kombinace řádků matice B s koeficienty z i -tého řádku matice A , jinými slovy, součin i -tého řádku matice A , řádek je matice typu $1 \times n$, a matice B .

Analogicky, první sloupek matice AB získáme tak, že vezmeme B_1^1 -násobek sloupku $A_\circ^1$, B_1^2 -násobek sloupku $A_\circ^2$, ..., B_1^n -násobek sloupku $A_\circ^n$ a všechny tyto násobky sečteme. Je to tedy lineární kombinace sloupků matice A s koeficienty z prvního sloupku matice B , jinými slovy, součin matice A a prvního sloupku matice B , sloupek je matice typu $n \times 1$.

Obdobně získáme ostatní sloupky matice AB . Obecně, j -tý sloupek matice AB získáme tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ prvkem B_j^k vynásobíme k -tý sloupek matice A a všechny tyto násobky sečteme. Takže j -tý sloupek matice AB je lineární kombinace sloupků matice A s koeficienty z j -tého sloupku matice B , jinými slovy, součin matice A a j -tého sloupku matice B , sloupek je matice typu $n \times 1$.

Nejsou-li typy matic v uvedeném vztahu (druhá má tolik řádků, kolik má první sloupků), nelze je (v daném pořadí) násobit, příslušný součin neexistuje.

Příklad. (1) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 \cdot (-1) & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 \cdot (1 & 2) + 2 \cdot (3 & 4) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ (1 & 2) + (6 & 8) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ (1 & 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(2) Pro

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ je} \\
AB &= (1 \cdot 0 + 2 \cdot 3) = (6), \\
BA &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(3) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je } AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, BA \text{ neexistuje.}$$

□

Předcházející příklady ukazují, že součin matic není komutativní, tedy nemusí platit $AB = BA$.

Cvičení. Spočtete

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Tvrzení 1.2.2. (1) Je-li i -tý řádek matice A nulový, pak i -tý řádek matice AB je nulový.

(2) Je-li j -tý sloupek matice B nulový, pak j -tý sloupek matice AB je nulový.

(3) Součin diagonálních matic je diagonální matice.

(4) Součin blokově diagonálních matic s bloky stejných typů je blokově diagonální matice s bloky stejných typů.

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodu (4), ostatní ponecháme jako cvičení.

(4) Buďte A, B blokově diagonální matice s bloky $A_1, \dots, A_p$, resp. $B_1, \dots, B_p$ takovými, že pro každé i A_i, B_i jsou stejného typu. A, B jsou tedy čtvercové matice stejného typu a je možné je vzájemně násobit.

i -tý řádek matice A je

$$A_{\circ}^i = (0 \quad \dots \quad 0 \quad A_{i_1}^i \quad \dots \quad A_{i_m}^i \quad 0 \quad \dots \quad 0),$$

čili $A_j^i = 0$ pro $j < i_1$ a $j > i_m$.

j -tý sloupek matice B je

$$B_j^{\circ} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_j^{j_1} \\ \vdots \\ B_j^{j_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

čili $B_j^i = 0$ pro $i < j_1$ a $i > j_n$.

Jsou-li i, j taková, že pozice v i -tém řádku a j -tém sloupku je mimo bloky $A_1, \dots, A_p$, resp. $B_1, \dots, B_p$, pak buď $i_1 > j_n$ nebo $i_m < j_1$. V obou případech pro každé k buď $A_k^i = 0$ nebo $B_j^k = 0$. Jelikož $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ pro každé x z příslušného pole, viz kapitola 6, v obou případech pro každé k platí $A_k^i B_j^k = 0$, tedy i

$$(AB)_j^i = \sum_k A_k^i B_j^k = 0,$$

takže AB je blokově diagonální matice s bloky stejných typů, jakých jsou bloky v maticích A a B . $\square$

Tvrzení 1.2.3. *Nechť A, B, C jsou matice nad polem P takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a $c \in P$. Pak platí*

$$\begin{array}{ll} (1) \ A(BC) = (AB)C, & (4) \ (A+B)C = AC + BC, \\ (2) \ AE = EA = A, & (5) \ c(AB) = (cA)B = A(cB). \\ (3) \ A(B+C) = AB + AC, \end{array}$$

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodů (1) a (3), ostatní ponecháme jako cvičení.

(1) Předpokládejme, že A je matice typu $m \times n$, B je matice typu $n \times p$ a C je matice typu $p \times q$. Potom AB je matice typu $m \times p$ a BC je matice typu $n \times q$, takže $A(BC)$ a $(AB)C$ jsou matice typu $m \times q$.

$$\begin{aligned} (A(BC))_j^i &= && \text{(podle definice součinu matic)} \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^i (BC)_j^k = && \text{(podle definice součinu matic)} \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^i \sum_{l=1}^p (B_l^k C_j^l) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p A_k^i (B_l^k C_j^l) = && \text{(díky asociativitě součinu v poli)} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (A_k^i B_l^k) C_j^l = && \text{(díky komutativitě součtu v poli)} \\ &= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (A_k^i B_l^k) C_j^l = && \text{(podle definice součinu matic)} \\ &= \sum_{l=1}^p (AB)_l^i C_j^l = && \text{(podle definice součinu matic)} \\ &= ((AB)C)_j^i. \end{aligned}$$

(3) Předpokládejme, že A je matice typu $m \times n$ a B, C jsou matice typu $n \times p$. Potom $A(B+C)$ a $AB+AC$ jsou matice typu $m \times p$ a pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

a $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ platí

$$(A(B + C))_j^i = \quad (\text{podle definice součinu matic})$$

$$= \sum_{k=1}^n A_k^i (B + C)_j^k = \quad (\text{podle definice součtu matic})$$

$$= \sum_{k=1}^n A_k^i (B_j^k + C_j^k) = \quad (\text{díky distributivnímu zákonu v poli})$$

$$= \sum_{k=1}^n (A_k^i B_j^k + A_k^i C_j^k) = \quad (\text{díky komutativitě sčítání v poli})$$

$$= \sum_{k=1}^n A_k^i B_j^k + \sum_{k=1}^n A_k^i C_j^k = \quad (\text{podle definice součinu matic})$$

$$= (AB)_j^i + (AC)_j^i = \quad (\text{podle definice součtu matic})$$

$$= (AB + AC)_j^i.$$

□