

9. přednáška, 15. 4. 2025

Tvrzení 14.4.1. Každá ortogonální množina nenulových vektorů je lineárně nezávislá.*Důkaz.* Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonální množina nenulových vektorů. Nechť

$$p^1 v_1 + \dots + p^n v_n = 0.$$

Když pro libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$ obě strany této rovnosti skalárně vynásobíme zprava vektorem v_i , dostaneme

$$\begin{aligned} (p^1 v_1 + \dots + p^n v_n, v_i) &= (0, v_i) && \text{(linearita v prvním argumentu)} \\ p^1 (v_1, v_i) + \dots + p^n (v_n, v_i) &= 0 && \text{(kolmost)} \\ p^i (v_i, v_i) &= 0 && (v_i \neq 0 \text{ a } (v_i, v_i) > 0) \\ p^i &= 0. \end{aligned}$$

Takže $p^i = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. $\square$ **Důsledek.** Každá n -prvková ortogonální množina nenulových vektorů v n -rozměrném prostoru je báze tohoto prostoru.**Příklad.** (1) Mějme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Kanonická báze je ortonormální.(2) Mějme prostor všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, 2\pi]$ se skalárním součinem

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Množina $\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots\}$ je ortogonální. $\square$ **Tvrzení 14.4.2** (Pythagorova věta). Buďte V prostor se skalárním součinem a $u, v \in V$ kolmé. Pak

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \\ &= (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) = && (u \perp v) \\ &= (u, u) + (v, v) = \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Cvičení. Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonální množina. Ukažte, že

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2. \quad \square$$

14.5. Souřadnice vzhledem k ortonormální bázi

Tvrzení 14.5.1. Nechť V je prostor se skalárním součinem, $(e_1, \dots, e_n)$ jeho báze a $v \in V$. Je-li $(e_1, \dots, e_n)$ ortogonální báze, pak

$$v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n,$$

čili i -tá souřadnice vektoru v vzhledem k uvedené bázi je

$$x^i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} = \frac{(v, e_i)}{\|e_i\|^2}.$$

Je-li $(e_1, \dots, e_n)$ navíc ortonormální báze, pak

$$v = (v, e_1)e_1 + \dots + (v, e_n)e_n,$$

čili i -tá souřadnice vektoru v vzhledem k uvedené bázi je

$$x^i = (v, e_i).$$

Důkaz. Buď $(e_1, \dots, e_n)$ ortogonální báze. Nechť $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Obě strany vynásobíme zprava vektorem e_i s $i \in \{1, \dots, n\}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} (v, e_i) &= (x^1 e_1 + \dots + x^n e_n, e_i) = \\ &= x^1 (e_1, e_i) + \dots + x^n (e_n, e_i) = \\ &= x^i (e_i, e_i). \end{aligned}$$

Bázové vektory jsou nenulové, takže (e_i, e_i) je nenulové a $x^i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} = \frac{(v, e_i)}{\|e_i\|^2}$.

Pokud $(e_1, \dots, e_n)$ je ortonormální báze, pak zřejmě $x^i = (v, e_i)$. □

Tvrzení 14.5.2. Nechť V je prostor se skalárním součinem, $(e_1, \dots, e_n)$ jeho ortonormální báze, $u, v \in V$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ souřadnice vektoru u a $y = (y^1, \dots, y^n)$ souřadnice vektoru v vzhledem k uvedené bázi. Potom

$$(u, v) = x^T \bar{y} = x^1 \bar{y}^1 + \dots + x^n \bar{y}^n.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} (u, v) &= \left(\sum_{i=1}^n x^i e_i, \sum_{i=1}^n y^i e_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x^i e_i, y^j e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i \bar{y}^j (e_i, e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n x^i \bar{y}^i. \end{aligned}$$

□

14.6. Kolmost množin

Definice 14.6.1. Buď V prostor se skalárním součinem, $v \in V$ a $M, N \subseteq V$. Vektor v je kolmý na množinu M , jestliže v je kolmý na každý vektor z M , zapisujeme $v \perp M$. Množina M je kolmá na množinu N , jestliže každý vektor množiny M je kolmý na každý vektor množiny N , zapisujeme $M \perp N$.

Cvičení. V průniku kolmých množin může být jen nulový vektor. □

Například, dvě roviny v $\mathbb{R}^3$ nejsou vzájemně kolmé.

Tvrzení 14.6.1. Buď V prostor se skalárním součinem a $M, N \subseteq V$. Potom $M \perp N$ právě tehdy, když $\llbracket M \rrbracket \perp N$, a to je právě tehdy, když $\llbracket M \rrbracket \perp \llbracket N \rrbracket$.

Důkaz. Předpokládejme, že $M \perp N$. Buď $u \in \llbracket M \rrbracket$ a $v \in N$, čili $u = p^1 u_1 + \dots + p^n u_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, skaláry $p^1, \dots, p^n$ a vektory $u_1, \dots, u_n \in M$. Potom

$$\begin{aligned} (u, v) &= (p^1 u_1 + \dots + p^n u_n, v) = \\ &= p^1 (u_1, v) + \dots + p^n (u_n, v) = 0. \end{aligned}$$

Takže $\llbracket M \rrbracket \perp N$.

Opačná implikace a druhá ekvivalence jsou zřejmé. □

Chceme-li ověřit, zda vektor $v \in V$ je kolmý na podprostor $U \subseteq V$, díky předcházejícímu tvrzení stačí ověřit, zda vektor v je kolmý na všechny vektory z libovolné množiny generátorů podprostoru U .

14.7. Ortogonální doplněk

Definice 14.7.1. Nechť V je prostor se skalárním součinem a $U \subseteq V$. *Ortogonální doplněk* $U^\perp$ množiny U je množina všech vektorů z V kolmých na každý vektor z U , tedy

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \text{ pro všechna } u \in U\}.$$

Množina $U^\perp$ je tedy největší množina kolmá na U .

Tvrzení 14.7.1. *Bud' V prostor se skalárním součinem, $U, U_1, U_2 \subseteq V$. Pak*

- (1) *jestliže $U_1 \subseteq U_2$, pak $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$,*
- (2) *$U^\perp = \llbracket U \rrbracket^\perp$,*
- (3) *$U^\perp$ je podprostor V .*

Důkaz. (1) Je-li $U_1 \subseteq U_2$ a $v \in U_2^\perp$, tedy $v \perp U_2$, potom $v \perp U_1$ a $v \in U_1^\perp$.
 (2) Pro $v \in V$ podle Tvrzení 14.6.1 $v \in U^\perp$ právě tehdy, když $v \in \llbracket U \rrbracket^\perp$.
 (3) Zřejmě $0 \in U^\perp$. Pro libovolné $v_1, v_2 \in U^\perp$ a $u \in U$ platí $(v_1 + v_2, u) = (v_1, u) + (v_2, u) = 0$, takže $v_1 + v_2 \in U^\perp$. Pro libovolný skalár p , $v \in U^\perp$ a $u \in U$ platí $(pv, u) = p(v, u) = 0$, takže $pv \in U^\perp$. $\square$

14.8. Ortogonální projekce

Definice 14.8.1. Bud' V prostor se skalárním součinem, $v \in V$ a U podprostor V . Vektor $u \in U$ je *ortogonální projekce (kolmý průmět) vektoru v do podprostoru U* , jestliže $(v - u) \perp U$, tedy $v - u \in U^\perp$. Označujeme $u = v_U$ nebo $u = \text{pr}_U(v)$.

Z definice vyplývá, že je-li $v \in U$, potom $v_U = v$.

Tvrzení 14.8.1. *Bud' V prostor se skalárním součinem, U podprostor V a $v \in V$. Pak pro každý vektor $u \in U$, $u \neq v_U$, platí*

$$\|v - v_U\| < \|v - u\|.$$

Ortogonální projekce vektoru do podprostoru je určena jednoznačně, pokud existuje.

Důkaz. Podle definice $v_U \in U$ a $(v - v_U) \perp U$, takže pro každé $u \in U$ platí $(v - v_U) \perp (v_U - u)$. Pro $u \neq v_U$ navíc

$$\begin{aligned} \|v - v_U\|^2 &< & (\|v_U - u\| > 0) \\ &< \|v - v_U\|^2 + \|v_U - u\|^2 = & (\text{Pythagorova věta}) \\ &= \|(v - v_U) + (v_U - u)\|^2 = \\ &= \|v - u\|^2. \end{aligned}$$

Nechť $u_1, u_2 \in U$ jsou ortogonální projekce vektoru v do podprostoru U . Předpokládejme, že $u_1 \neq u_2$. Potom podle právě dokázaného

$$\|v - u_1\| < \|v - u_2\| \quad \text{a zároveň} \quad \|v - u_2\| < \|v - u_1\|.$$

Dostáváme spor, takže $u_1 = u_2$ a ortogonální projekce je tedy určena jednoznačně. $\square$

Tvrzení 14.8.2. *Budte V prostor se skalárním součinem, U jeho konečněrozměrný podprostor a $(e_1, \dots, e_m)$ ortogonální báze podprostoru U . Pak pro každé $v \in V$ platí*

$$\text{pr}_U(v) = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 + \dots + \frac{(v, e_m)}{(e_m, e_m)}e_m.$$

Je-li $(e_1, \dots, e_m)$ navíc ortonormální báze, pak

$$\text{pr}_U(v) = (v, e_1)e_1 + \dots + (v, e_m)e_m.$$

Důkaz. Vektor $u = u^1e_1 + \dots + u^me_m \in U$ je ortogonální projekce vektoru v do podprostoru $U = \llbracket e_1, \dots, e_m \rrbracket$ právě tehdy, když vektor $v - u$ je kolmý ke každému vektoru z U , což je právě tehdy, když $v - u$ je kolmý ke každému e_i , to je právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} 0 &= (v - u, e_i) = (v, e_i) - (u, e_i) = \\ &= (v, e_i) - (u^1e_1 + \dots + u^me_m, e_i) = \\ &= (v, e_i) - u^1(e_1, e_i) - \dots - u^m(e_m, e_i) = \\ &= (v, e_i) - u^i(e_i, e_i) \end{aligned}$$

a to je právě tehdy, když $u^i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$, jelikož $(e_i, e_i) \neq 0$.

Pokud $(e_1, \dots, e_n)$ je ortonormální báze, pak zřejmě $u^i = (v, e_i)$. □

14.9. Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Tvrzení 14.9.1. *V každém konečněrozměrném vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.*

Důkaz. Existenci ortonormální báze dokážeme pomocí *Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace*.

Budte V konečněrozměrný prostor se skalárním součinem a $(v_1, \dots, v_n)$ jeho báze. Ukažme, že existuje jeho ortogonální báze.

- (1) Položme $e_1 = v_1$. Potom vektor e_1 je nenulový, $\{e_1\}$ je lineárně nezávislá množina a $\llbracket e_1 \rrbracket = \llbracket v_1 \rrbracket$.
- (2) Postupně pro $k = 1, \dots, n-1$ předpokládejme, že máme $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortogonální množinu nenulových vektorů (tedy lineárně nezávislou množinu) takovou, že $\llbracket e_1, \dots, e_k \rrbracket = \llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket$. Označme $U_k = \llbracket e_1, \dots, e_k \rrbracket$. Vektor e_{k+1} získáme tak, že od vektoru v_{k+1} odečteme jeho ortogonální projekci do podprostoru U_k . Tedy

$$e_{k+1} = v_{k+1} - \text{pr}_{U_k}(v_{k+1}) = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(v_{k+1}, e_i)}{(e_i, e_i)}e_i.$$

Podle definice ortogonální projekce vektor e_{k+1} je kolmý na U_k , tedy na všechny vektory z U_k , včetně $e_1, \dots, e_k$. Množina $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ je tedy ortogonální.

Jelikož báze je lineárně nezávislá, vektor v_{k+1} není prvkem podprostoru U_k a nerovná se tedy své ortogonální projekci $\text{pr}_{U_k}(v_{k+1})$ do tohoto podprostoru. Proto e_{k+1} je nenulový vektor a množina $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ je lineárně nezávislá.

K tomu, $\llbracket e_1, \dots, e_{k+1} \rrbracket = \llbracket v_1, \dots, v_{k+1} \rrbracket$. Platí $e_1 = v_1$ a $e_i, i \in \{2, \dots, k+1\}$, je lineární kombinace vektorů $e_1, \dots, e_{i-1}, v_i$, proto $\llbracket e_1, \dots, e_{k+1} \rrbracket \subseteq \llbracket v_1, \dots, v_{k+1} \rrbracket$. Na druhou stranu, v_i pro $i \in \{1, \dots, k+1\}$ je lineární kombinace vektorů $e_1, \dots, e_i$, proto $\llbracket v_1, \dots, v_{k+1} \rrbracket \subseteq \llbracket e_1, \dots, e_{k+1} \rrbracket$.

Takže pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ $(e_1, \dots, e_k)$ je ortogonální báze prostoru U_k a $U_n = V$.

Nakonec, pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ položíme

$$\bar{e}_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$$

a dostaneme ortonormální bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ prostoru V . □

V předchozím důkazu je možné vždy po získání e_k tento vektor normovat a dostat tak ortonormální bázi prostoru U_k . V takovém případě se zjednoduší výpočet ortogonální projekce do podprostoru U_k a tedy i výpočet vektoru e_{k+1} .