

13.2. Druhý rozklad lineární transformace

Úmluva. Všude $P = \mathbb{C}$.

V přednášce o vlastních vektorech jsme se seznámili s diagonalizovatelnými transformacemi. V bázi složené z vlastních vektorů v_i mají diagonální matici s vlastními čísly λ_i na diagonále.

Obecná lineární transformace nemusí mít bázi složenou z vlastních vektorů. Nicméně, jak ukážeme, lze zkonstruovat jinou významnou bázi — Jordanovu. Matice lineární transformace v Jordanově bázi je tzv. Jordanova matice. Opět má na diagonále vlastní čísla, ale může obsahovat i nenulové prvky v řadě sousedící s diagonálou (všechny ovšem rovný 1).

Východiskem pro nalezení Jordanovy báze bude první rozklad, příslušný rozkladu charakteristického polynomu (nebo libovolného jiného anulujícího polynomu) χ_f na nesoudělné součinitele. Při $P = \mathbb{C}$ ovšem existuje rozklad na kořenové činitele

$$\chi_f = (x - \xi_1)^{k_1} \cdots (x - \xi_s)^{k_s}, \quad \xi_i \neq \xi_j \text{ pro } i \neq j,$$

a pro $i \neq j$ jsou polynomy $(x - \xi_i)^{k_i}$ a $(x - \xi_j)^{k_j}$ nesoudělné. Invariantní podprostory prvního rozkladu pak jsou

$$U_i = \text{Ker}(f - \xi_i \text{id})^{k_i}.$$

Na jednotlivých invariantních podprostorech vznikají restrikce $f|_{U_i} : U_i \rightarrow U_i$. Označíme-li $g_i = f - \xi_i \text{id}$, pak $\text{Ker } g_i^{k_i} = U_i$, a tedy $(g|_{U_i})^{k_i} = 0$.

Má tedy smysl studovat transformace $f : U \rightarrow U$ takové, že pro některé číslo ξ transformace $g = f - \xi \text{id}$ splňuje $g^k = 0$. Výsledky použijeme pro $U = U_i$ a $g = f|_{U_i} - \xi_i \text{id}_{U_i}$, $i = 1, \dots, s$.

13.2.1. Rozklad na součet cyklických podprostorů

Definice 13.2.1. Transformace $g : U \rightarrow U$ (resp. čtvercová matice B) se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové, že $g^k = 0$ (resp. $B^k = 0$).

Cvičení. Transformace g je nilpotentní právě tehdy, když je její matice B (v libovolné bázi) nilpotentní. □

Definice 13.2.2. Podprostor $T \subseteq U$ se nazývá *cyklický* vzhledem k transformaci $g : U \rightarrow U$, jestliže má bázi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ takovou, že

$$g(e_1) = e_2, \quad g(e_2) = e_3, \quad \dots, \quad g(e_{n-1}) = e_n, \quad g(e_n) = 0.$$

Bázi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ nazýváme *cyklická báze*.

Schematicky,

$$e_1 \xrightarrow{g} e_2 \xrightarrow{g} \cdots e_{n-1} \xrightarrow{g} e_n \xrightarrow{g} 0.$$

Definice 13.2.3. Matice

$$J_1(\xi) = (\xi), \quad J_2(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad J_3(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix},$$

$$J_4(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

se nazývají *Jordanovy bloky* (též *Jordanovy buňky*).

Tvrzení 13.2.1. *Buď T cyklický podprostor nilpotentní transformace g , buď $f = g + \xi \text{id}$. Pak*

- (1) T je invariantní vzhledem k lineárním transformacím g i f ;
- (2) $g|_T$ má v cyklické bázi matici $J_n(0)$;
- (3) $f|_T$ má v cyklické bázi matici $J_n(\xi)$.

Důkaz. Cvičení. □

Často se setkáváme s jinou definicí Jordanových buněk — jedničky stojí v řadě těsně nad diagonálou. To odpovídá opačnému pořadí vektorů cyklické báze, tj. $(e_n, \dots, e_2, e_1)$.

Lemma 13.2.2. *Buď $h: U \rightarrow V$ lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory. Zvolme libovolně bázi v $\text{Ker } h$ a doplňme ji do báze v U nějakými vektory $e_1, \dots, e_m$. Pak vektory $h(e_1), \dots, h(e_m)$ tvoří bázi v $\text{Im } h$.*

Důkaz. Cvičení (viz důkaz formule $\dim U = \dim \text{Ker } h + \dim \text{Im } h$ v Tvrzení 11.2.3). □

Tvrzení 13.2.3. *Buď $g: U \rightarrow U$ nilpotentní transformace. Pak existují cyklické podprostory $T_1, \dots, T_r \subseteq U$ takové, že $U = T_1 \dot{+} \dots \dot{+} T_r$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme uvedením praktického algoritmu pro nalezení cyklických podprostorů a jejich cyklickýchází. Popis algoritmu tvoří věty psané kurzívou.

Máme $U = \text{Ker } g^k$ pro jisté k (protože g je nilpotentní). Bez újmy na obecnosti je číslo k minimální, to jest, $g^{k-1} \neq 0$, a tudíž $\text{Ker } g^{k-1} \neq U$.

1. *Zvolíme libovolně bázi v $\text{Ker } g^{k-1}$ a doplňme ji do báze v $U = \text{Ker } g^k$ nějakými vektory $e_1, \dots, e_{m_1}$.*

Podle lemmatu vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ tvoří bázi v $\text{Im } g^{k-1}$ a jsou tedy lineárně nezávislé. Navíc, jelikož $g^k = 0$, máme $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \text{Ker } g^{k-1}$.

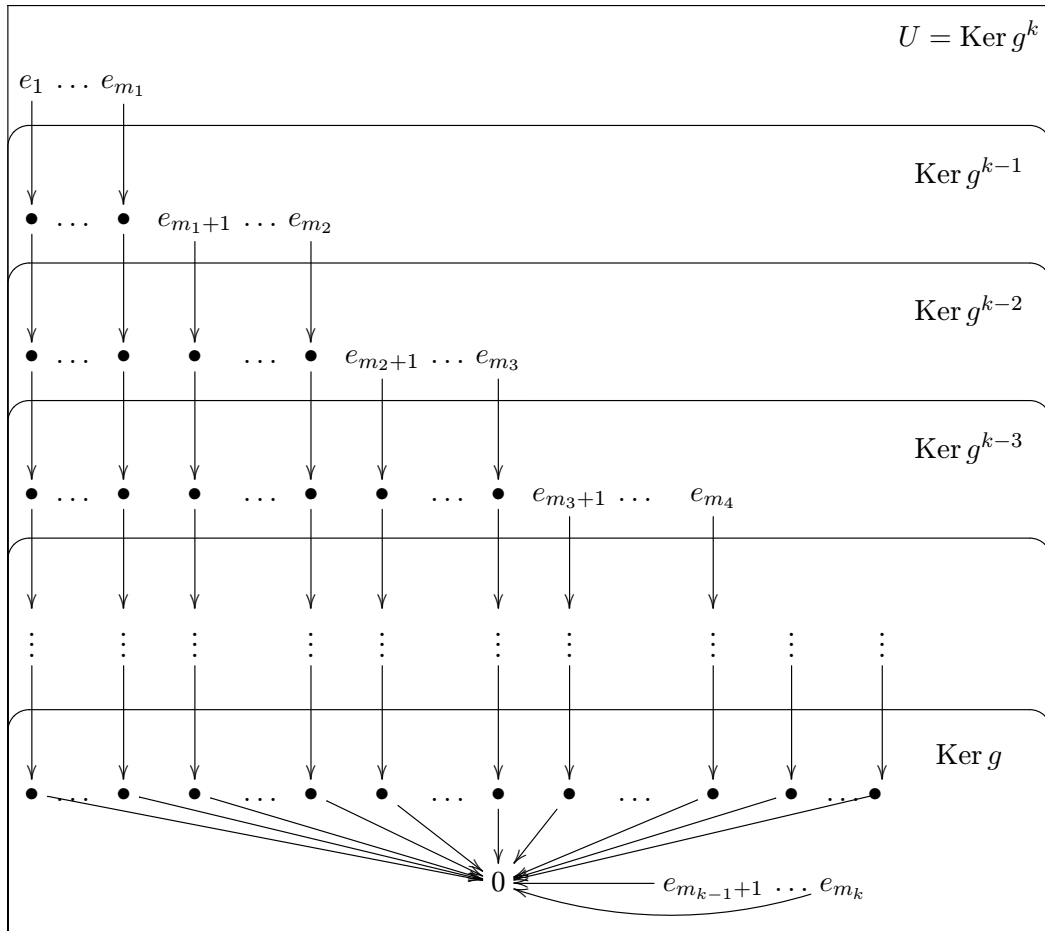
2. *Zvolíme libovolně bázi v $\text{Ker } g^{k-2}$ a přidáme k ní vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \text{Ker } g^{k-1}$.* Tato sestava je lineárně nezávislá. Skutečně, vezměme si lineární kombinaci všech vektorů z této sestavy, která je rovna nulovému vektoru. Máme tedy skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}$, takové, že $c_1 g(e_1) + \dots + c_{m_1} g(e_{m_1}) \in \text{Ker } g^{k-2}$. Pak ovšem $0 = g^{k-2}(c_1 g(e_1) + \dots + c_{m_1} g(e_{m_1})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \dots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1})$, a tedy $c_1 = \dots = c_{m_1} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ jsou lineárně nezávislé (viz výše). A potom také ostatní koeficienty v uvažované lineární kombinaci jsou nulové, protože příslušné vektory tvoří bázi.

Sestavu doplňme do báze v $\text{Ker } g^{k-1}$ nějakými vektory $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$.

Tím se vlastně báze v $\text{Ker } g^{k-2}$ doplní do báze v $\text{Ker } g^{k-1}$ vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$. Z lemmatu potom vyplývá, že vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})$ tvoří bázi v $\text{Im}(g^{k-2}|_{\text{Ker } g^{k-1}})$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

3. *Zvolíme libovolně bázi v $\text{Ker } g^{k-3}$ a připojíme k ní vektory $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}) \in \text{Ker } g^{k-2}$.*

Tato sestava je lineárně nezávislá. Skutečně, vezměme si lineární kombinaci všech vektorů z této sestavy, která je rovna nulovému vektoru. Máme tedy skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \dots, c_{m_2}$, takové, že $c_1 g^2(e_1) + \dots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \dots + c_{m_2} g(e_{m_2}) \in \text{Ker } g^{k-3}$. Pak ovšem $0 = g^{k-3}(c_1 g^2(e_1) + \dots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \dots + c_{m_2} g(e_{m_2})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \dots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g^{k-2}(e_{m_1+1}) + \dots + c_{m_2} g^{k-2}(e_{m_2})$, a tedy $c_1 = \dots = c_{m_1} = c_{m_1+1} = \dots = c_{m_2} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})$ jsou lineárně nezávislé (viz výše). A potom také ostatní koeficienty v uvažované lineární kombinaci jsou nulové, protože příslušné vektory tvoří bázi.



Sestavu doplníme do báze v $\text{Ker } g^{k-2}$ nějakými vektory $e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$.

Tím jsme tedy bázi v $\text{Ker } g^{k-3}$ doplnili do báze v $\text{Ker } g^{k-2}$ vektory $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$. A potom vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}), g^{k-3}(e_{m_2+1}), \dots, g^{k-3}(e_{m_3})$ tvoří podle lematu bázi v $\text{Im}(g^{k-3}|_{\text{Ker } g^{k-2}})$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

Podobných kroků provedeme k (v posledním kroku doplňujeme bázi podprostoru $\text{Ker } g^0 = \text{Ker id} = \{0\}$ do báze v podprostoru $\text{Ker } g$).

Z uvedeného postupu vyplývá, že celkově získáme bázi

$$\begin{aligned} & e_1, \dots, e_{m_1}, \\ & g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}, \\ & g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}, \\ & \dots \\ & g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}), \\ & \quad g^{k-3}(e_{m_2+1}), \dots, g^{k-3}(e_{m_3}), \dots, e_{m_{k-1}+1}, \dots, e_{m_k} \end{aligned}$$

v prostoru U . Podprostory

$$\begin{aligned} & \llbracket e_1, g(e_1), \dots, g^{k-1}(e_1) \rrbracket, \dots, \llbracket e_{m_1}, g(e_{m_1}), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}) \rrbracket, \\ & \llbracket e_{m_1+1}, g(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_1+1}) \rrbracket, \dots, \llbracket e_{m_2}, g(e_{m_2}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}) \rrbracket, \\ & \dots \\ & \llbracket e_{m_{k-1}+1} \rrbracket, \dots, \llbracket e_{m_k} \rrbracket \end{aligned}$$

jsou pak cyklické podprostory s příslušnými cyklickými bázemi.

Označíme-li počet těchto cyklických podprostorů $r := \sum_{j=1}^k m_j$ a jednotlivé podprostory T_i pro $i = 1, \dots, r$, dostáváme $U = T_1 + \dots + T_r$. Jelikož $\dim T_1 + \dots + \dim T_r = \dim(T_1 + \dots + T_r)$, podle Tvzení 10.3.3 se jedná o přímý součet podprostorů. $\square$

Nalezli jsme cyklické podprostory a v každém z nich cyklickou bázi. Situaci můžeme znázornit diagramem, jehož vrcholy jsou vektory cyklických bází a šipky znamenají zobrazení g :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & & & & & & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \quad (13)$$

Sloupky znamenají jednotlivé cyklické podprostory. Vektory spodní řady se zobrazují na nulový vektor. Tvoří vlastně bázi v $\text{Ker } g = \text{Ker}(f - \xi \text{id}) = V_\xi$, což je prostor vlastních vektorů s vlastním číslem ξ . Tudíž, počet sloupků = počet cyklických podprostorů = $\dim V_\xi$.

Vektory dolních j řádků tvoří bázi v $\text{Ker } g^j$. V j -tém řádku zdola je proto právě

$$n_j = \dim \text{Ker } g^j - \dim \text{Ker } g^{j-1} = \sum_{i=1}^{k+1-j} m_i \quad (14)$$

bodů, kde m_i jsou koeficienty z důkazu předchozího tvrzení. Čísla $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ jednoznačně určují délky řádků diagramu, a tím i počty cyklických podprostorů příslušných dimenzí.

Formule (14) ukazuje, že čísla $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ závisí jen a jen na nilpotentní transformaci g a nikoliv na konkrétním postupu, kterým byly získány jednotlivé cyklické báze. Jsou to *invarianty lineární transformace* g .

Důsledek. *Buď $g: U \rightarrow U$ nilpotentní transformace. Pak existuje báze prostoru U taková, že*

- (1) *transformace g má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků $J_s(0)$;*
- (2) *transformace $f = g + \xi \text{id}$ má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků $J_s(\xi)$.*

Důkaz. Báze sestavená z cyklických bází cyklických podprostorů v důkazu předchozího tvrzení má požadované vlastnosti. $\square$

Příklad. Uvažujme lineární transformaci $\mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$, $v \mapsto Av$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anulující polynom nejmenšího stupně je $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$, s jediným kořenem -2 , což je současně jediná vlastní hodnota matice A . První rozklad má proto jediného sčítance $U = \mathbb{C}^5$ a

$$B = A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní matice, $B^3 = 0$. Spočítáme

$$B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

načež $\text{Ker } B^2 = \llbracket (5, 0, 0, 0, -4), (0, 5, 0, 0, -1), (0, 0, 5, 0, -2), (0, 0, 0, 5, 4) \rrbracket$. Tento čtyřrozměrný podprostor můžeme doplnit do báze v $\mathbb{C}^5$ libovolným vektorem, který v něm neleží, zvolme například

$$e_1 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Tím je ukončen první krok. Ve druhém kroku spočítáme

$$\text{Ker } B = \llbracket (1, 0, 0, 1, 0), (0, -5, 1, -2, -1) \rrbracket,$$

a přidáme vektor

$$Be_1 = (0, 0, 3, 4, 2).$$

Získanou sestavu tří lineárně nezávislých vektorů je třeba doplnit do báze ve čtyřrozměrném $\text{Ker } B^2$ jedním vektorem; zvolme například

$$e_2 = (0, 0, 0, 5, 4)$$

(mohli jsme zvolit kterýkoliv ze shora uvedených generátorů podprostoru $\text{Ker } B^2$). Tím je ukončen druhý krok. Ve třetím kroku je $\text{Ker } B^0 = \text{Ker } E = 0$ a doplňujeme tedy dva vektory

$$B^2e_1 = (-5, 0, 0, -5, 0) \quad \text{a} \quad Be_2 = (-10, 15, -3, -4, 3)$$

do báze v dvojrozměrném $\text{Ker } B$, což ovšem nevyžaduje žádný doplňující vektor a jsme hotovi.

Hledaná báze prostoru $\mathbb{C}^5$ je proto $(e_1, Be_1, B^2e_1, e_2, Be_2)$. Příslušný diagram je



a jeho dva sloupky odpovídají dvěma Jordanovým blokům rozměrů 3 a 2. Dostáváme blokově diagonální matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(při obráceném pořadí vektorů v cyklických bázích by jedničky stály nad diagonálou; odlišné může být i pořadí Jordanových bloků). $\square$

13.2.2. Druhý rozklad a Jordanův tvar matice

Vraťme se nyní k obecné transformaci $f: V \rightarrow V$ a prvnímu rozkladu $V = U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_s$ podle některého anulujícího polynomu. Pro každý z prostorů U_l , $l = 1, \dots, s$ dostáváme rozklad na cyklické podprostory $T_{l,i}$, kde $i = 1, \dots, k_l$, celkem tedy

$$V = T_{1,1} \dot{+} \dots \dot{+} T_{1,k_1} \dot{+} \dots \dot{+} T_{s,1} \dot{+} \dots \dot{+} T_{s,k_s}.$$

Definice 13.2.4. Tento rozklad je *druhý rozklad* prostoru lineární transformace.

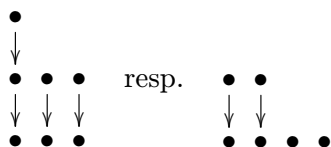
Připomeňme, že cyklické podprostory $T_{i,j}$ jsou invariantní a zobrazení $f|_{T_{i,j}}$ mají v cyklické bázi matici tvaru $J_r(\xi)$, $r = \dim T_{i,j}$.

Definice 13.2.5. Matice, která je přímým součtem Jordanových bloků, je *matice v Jordanově tvaru*.

Příklad. Matice

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc|cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

je v Jordanově tvaru. Bloky prvního rozkladu jsou vyznačeny dvojitou čarou. Blokům druhého rozkladu odpovídají diagramy



Šipky zde znamenají zobrazení $f - 2 \text{ id}$ resp. $f - 3 \text{ id}$. Délky spodních řádků jsou dimenze prostorů vlastních vektorů s vlastními hodnotami 2 resp. 3. $\square$

Důsledek. Buď $f: V \rightarrow V$ lineární transformace. Pak existuje báze prostoru V , vzhledem k níž f má matici v Jordanově tvaru.

Definice 13.2.6. Báze z předchozího důsledku je *Jordanova báze* a získáme ji sjednocením cyklických bází v jednotlivých cyklických podprostorech $T_{i,j}$.

Při praktickém převodu na Jordanův tvar nejdříve nalezneme invariantní podprostory $U = \text{Ker } g^k = \text{Ker}(f - \xi \text{id})^k$ prvního rozkladu, pro každou vlastní hodnotu ξ zvlášť. V každém z nich pak hledáme cyklické podprostory a cyklické báze postupem uvedeným v důkazu Tvzení 13.2.3.

Zbývá rozhodnout, nakolik je Jordanův tvar matice lineární transformace určen jednoznačně. Postup k nalezení Jordanovy báze, který jsme popsali, udává jednoznačně všechny Jordanovy buňky $J_r(\xi)$. Čísla ξ probíhají všechny vlastní hodnoty, rozměr r je určen prostřednictvím diagramů (13) a počet buněk s daným rozměrem je určen prostřednictvím čísel $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$, která jsou zase jednoznačně určena formulí (14), kde $g = f - \xi \text{id}$. Neurčeno pak zůstává pouze pořadí Jordanových buněk.

Cvičení. Spočítejte Jordanův tvar transponované matice A^T . (Výsledek: je týž.) $\square$

13.2.3. Minimální polynom

Minimální polynom můžeme jednoduše stanovit z Jordanova tvaru jako polynom

$$(x - \xi_1)^{\mu_1} \dots (x - \xi_s)^{\mu_s},$$

kde $\xi_1, \dots, \xi_s$ jsou vlastní hodnoty lineární transformace, resp. matice a $\mu_1, \dots, \mu_s$ jsou výšky (maximální délky sloupků) diagramů (13) pro jednotlivé vlastní hodnoty $\xi_1, \dots, \xi_s$. (Dokažte jako cvičení.)

Příklad. Matice z posledního příkladu má minimální polynom $(x - 2)^3(x - 3)^2$. $\square$

13.3. Jordanův tvar matice a kritérium podobnosti matic

Připomeňme, že dvě čtvercové matice A, B jsou podobné, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Zapisujeme $A \approx B$. Dále připomeňme, že matice jedné a téže lineární transformace v různých bázích jsou si podobné (maticí Q je v tomto případě matice přechodu mezi bázemi).

Tvrzení 13.3.1. Každá čtvercová komplexní matice je podobná matici v Jordanově tvaru.

Důkaz. Buď A čtvercová komplexní matice typu $n \times n$. Potom A je maticí lineární transformace $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $u \mapsto Au$. V Jordanově bázi má transformace f matici B v Jordanově tvaru. Pak $B \approx A$. $\square$

Definice 13.3.1. Matice B z předchozího důkazu je *Jordanův tvar matice A* .

Jordanův tvar je určen jednoznačně až na pořadí bloků a rozhoduje o podobnosti matic:

Tvrzení 13.3.2. Matice jsou si podobné právě tehdy, když mají stejný Jordanův tvar až na pořadí Jordanových bloků.

Důkaz. Jsou-li si matice A', A'' podobné, pak zobrazení $u \mapsto A'u$, $u \mapsto A''u$ mají stejné charakteristické polynomy, stejné vlastní hodnoty a stejné jsou i dimenze a počty invariantních podprostorů určené diagramy (13) a formulí (14) (cvičení). Proto jsou stejné i Jordanovy tvary.

Naopak, buďte $B' \approx A'$ a $B'' \approx A''$ Jordanovy tvary matic A' a A'' . Jestliže se B' a B'' liší jen pořadím Jordanových bloků, pak jsou si podobné (cvičení), načež $A' \approx B' \approx B'' \approx A''$. $\square$

Cvičení. Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici platí $A \approx A^T$.

Návod: Dokažte postupně

- (i) $J \approx J^T$ pro libovolnou Jordanovu matici J (stačí zpřeházet vektory v Jordanově bázi);
- (ii) je-li $A \approx J$, pak $A^T \approx J^T$. □