

## 13. JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

**Úmluva.** V této kapitole  $V$  je vektorový prostor (obvykle konečněrozměrný) nad polem  $P$  a  $f: V \rightarrow V$  je lineární transformace.

### 13.1. První rozklad lineární transformace

#### 13.1.1. Anulující polynom a minimální polynom

**Definice 13.1.1.** Nechť  $p \in P[x]$ ,  $p \neq 0$ . Polynom  $p$  je *anulující polynom* čtvercové matice  $A$  (resp. lineární transformace  $f$ ), jestliže  $p(A) = 0$  (resp.  $p(f) = 0$ ).

**Tvrzení 13.1.1** (Cayleyho-Hamiltonova věta). *Charakteristický polynom matice je její anulující polynom.*

*Důkaz.* Pro libovolnou čtvercovou matici  $B$  jsme v zimním semestru odvodili vztah  $B \cdot \text{adj } B = \det B \cdot E$ . Dosaďme za  $B$  matici  $A - xE$ :

$$(A - xE) \cdot \text{adj}(A - xE) = \chi_A(x) \cdot E. \quad (11)$$

Je-li matice  $A$  typu  $n \times n$ , pak její charakteristický polynom  $\chi_A$  je polynomem stupně  $n$ , řekněme  $\chi_A = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$ . Dále je (z definice adjungované matice) jasné, že prvky matice  $\text{adj}(A - xE)$  jsou polynomy stupně  $n - 1$  v  $x$ . Sdružíme-li sčítance s týmiž mocniny  $x$ , získáme vyjádření  $\text{adj}(A - xE) = C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1x + C_0$ , kde  $C_i$  jsou čtvercové matice typu  $n \times n$ .

Po dosazení do (11) máme

$$(A - xE) \cdot (C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1x + C_0) = (c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0) \cdot E,$$

tj.

$$\begin{aligned} & -C_{n-1}x^n + (AC_{n-1} - C_{n-2})x^{n-1} + \dots + (AC_1 - C_0)x + AC_0 = \\ & = c_n Ex^n + \dots + c_1 Ex + c_0 E. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin  $x$  obdržíme  $n + 1$  rovností

$$\begin{aligned} -C_{n-1} &= c_n E, \\ -C_{n-2} + AC_{n-1} &= c_{n-1} E, \\ &\vdots \\ -C_0 + AC_1 &= c_1 E, \\ AC_0 &= c_0 E. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li  $i$ -tou rovností  $(n + 1 - i)$ -tou mocninou  $A^{n+1-i}$  matice  $A$  a vzniklé rovnosti sečteme, získáme

$$0 = c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 E,$$

což se mělo dokázat. □

**Důsledek.** *Charakteristický polynom lineární transformace je její anulující polynom.*

**Příklad.** Matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom  $\chi_A = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$ , ale  $q = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$  je také anulující polynom matice  $A$  (ověřte).  $\square$

Poslední příklad ukazuje, že charakteristický polynom může mít netriviálního dělitele, který je rovněž anulujícím polynomem. Ukažme, že mezi anulujícími polynomy existuje jeden, který dělí všechny ostatní.

**Definice 13.1.2.** Anulující polynom se nazývá *minimální polynom*, je-li normovaný a nejmenšího stupně ze všech anulujících polynomů.

**Tvrzení 13.1.2.** Každý anulující polynom je dělitelný minimálním polynomem.

*Důkaz.* Buď  $f$  anulující polynom matice  $A$ , buď  $g$  minimální polynom matice  $A$ . Dělme se zbytkem:  $f = qg + r$ , kde buď  $r = 0$  nebo  $\deg r < \deg g$ . Do rovnosti dosadíme  $A$  a dostaneme

$$0 = f(A) = q(A)g(A) + r(A) = r(A),$$

protože  $f$  a  $g$  jsou anulující polynomy. Kdyby  $r \neq 0$ , byl by to anulující polynom nižšího stupně než minimální polynom  $g$ , což je spor, a proto  $r = 0$  a  $g$  je dělitelem  $f$ .  $\square$

**Důsledek.** Ke každé lineární transformaci konečněrozměrného vektorového prostoru resp. ke každé čtvercové matici existuje minimální polynom a je jediný.

**Cvičení.** Dokažte jednoznačnost minimálního polynomu.  $\square$

### 13.1.2. Invariantní podprostory

Je-li  $U \subseteq V$  podprostor, pak symbolem  $fU$  označujeme jeho obraz při zobrazení  $f$ , to jest, podprostor  $\{f(u) \mid u \in U\}$ .

**Definice 13.1.3.** Podprostor  $U \subseteq V$  je *invariantní* vzhledem k lineární transformaci  $f$ , jestliže  $fU \subseteq U$ , tj. když pro každé  $u \in U$  je  $f(u) \in U$ .

Je-li  $U$  invariantní podprostor, pak zobrazení  $U \rightarrow U$ , zadané předpisem  $u \mapsto f(u)$ , nazýváme *restrikce* (česky *ohraničení* nebo *zúžení*) lineárního zobrazení  $f$  na invariantní podprostor  $U$ . Značí se  $f|_U: U \rightarrow U$  a je zřejmě opět lineární (ověřte).

**Příklad.** (1) Celý prostor  $V$  a nulový podprostor jsou invariantní podprostory vzhledem ke každé lineární transformaci.

(2) Je-li  $f: v \mapsto cv$ , pak je každý podprostor invariantní.

(3) Je-li  $u$  vlastní vektor s vlastní hodnotou  $c$ , pak  $\llbracket u \rrbracket$  je invariantní podprostor a  $f|_{\llbracket u \rrbracket}$  je zobrazení  $v \mapsto cv$ .

(4) Mějme rotaci  $\varphi: E^3 \rightarrow E^3$  kolem zvolené pevné osy  $L$  procházející počátkem  $0$  o úhel  $\alpha \in (0, 2\pi)$ . Invariantní podprostory jsou nulový podprostor  $\{0\}$ , osa rotace  $L$ , její ortogonální doplněk  $L^\perp$  (rovina procházející počátkem kolmo k  $L$ ) a celý prostor  $E^3$ . Libovolný vektor  $u \in L$  se zobrazí sám na sebe, proto  $\varphi|_L$  je identické zobrazení  $\text{id}_L$ . Libovolný vektor  $v \in L^\perp$  zůstane v rovině  $L^\perp$  a  $\varphi|_{L^\perp}$  je otáčení roviny  $L^\perp$  o úhel  $\alpha$ .

(5) Mějme zrcadlení  $\zeta$  v prostoru  $E^3$  vzhledem k rovině  $U$  procházející počátkem 0. Invariantní podprostory jsou nulový podprostor  $\{0\}$ , rovina  $U$  a každý její podprostor  $V \subseteq U$ , ortogonální doplněk  $U^\perp$  (přímka procházející počátkem kolmo k  $U$ ) a celý prostor  $E^3$ . Zobrazení  $\zeta|_V$  je identické zobrazení  $\text{id}_V$ . Zobrazení  $\zeta|_{U^\perp}$  je zrcadlení přímky  $U^\perp$  vzhledem k počátku 0.  $\square$

**Cvičení.** (1) Jednorozměrný podprostor  $\llbracket u \rrbracket$ ,  $u \neq 0$ , je invariantní právě tehdy, když  $u$  je vlastní vektor. Dokažte.

(2) Průnik a součet invariantních podprostorů jsou invariantní podprostory. Dokažte.

(3)  $\text{Ker } f$  je invariantní podprostor. Dokažte. Co je  $f|_{\text{Ker } f}$ ?

(4)  $\text{Im } f$  je invariantní podprostor. Dokažte.

(5) Buď  $v \in V$  libovolný vektor. Dokažte, že  $\llbracket v, f(v), f(f(v)), f(f(f(v))), \dots \rrbracket$  je invariantní podprostor.

(6) Nechť lineární transformace  $f, g: V \rightarrow V$  komutují, to jest,  $f \circ g = g \circ f$ . Buď  $U \subseteq V$  invariantní podprostor vzhledem k transformaci  $f$ . Pak  $gU$  je též invariantní podprostor vzhledem k transformaci  $f$ .  $\square$

### 13.1.3. První rozklad lineární transformace

**Tvrzení 13.1.3.** *Buď  $q$  anulující polynom lineární transformace  $f: V \rightarrow V$  a necht existuje rozklad  $q = q_1 \cdots q_n$ , kde  $q_1, \dots, q_n$  jsou po dvou nesoudělné ( $D(q_i, q_j) = 1$  pro  $i \neq j$ ). Pro  $i \in \{1, \dots, n\}$  označme  $U_i = \text{Ker } q_i(f)$ . Pak platí:*

- (1) každý podprostor  $U_i$  je invariantní;
- (2)  $V = U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$ ;
- (3) pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  polynom  $q_i$  je anulujícím polynomem transformace  $f|_{U_i}$ .

*Důkaz.* (1) Nechť  $u \in U_i$ , tj.  $q_i(f)(u) = 0$ . Potom

$$q_i(f)(f(u)) = (q_i(f) \circ f)(u) = (f \circ q_i(f))(u) = f(q_i(f)(u)) = f(0) = 0$$

(použili jsme to, že  $f$  a  $q_i(f)$  spolu komutují podle Důsledku Tvrzení 11.5.7). Tudíž,  $f(u) \in U_i$ .

(2) Nejdříve případ  $n = 2$ . Nechť  $q = q_1 q_2$  a  $D(q_1, q_2) = 1$ . Pak existují polynomy  $p_1, p_2$  takové, že  $1 = q_1 p_1 + q_2 p_2$ . Dosazením  $f$  získáváme rovnost

$$\text{id} = q_1(f) \circ p_1(f) + q_2(f) \circ p_2(f),$$

takže pro libovolný vektor  $v \in V$  platí

$$v = q_1(f)(p_1(f)(v)) + q_2(f)(p_2(f)(v)). \quad (12)$$

Ukažme, že první sčítanec  $q_1(f)(p_1(f)(v))$  z (12) leží v  $U_2$ . Označíme-li  $w = p_1(f)(v)$ , stačí ověřit, že  $q_1(f)(w) \in \text{Ker } q_2(f)$ :

$$q_2(f)(q_1(f)(w)) = (q_2(f) \circ q_1(f))(w) = (q_2 q_1)(f)(w) = q(f)(w) = 0,$$

protože  $q$  je anulující polynom pro  $f$ . Podobně se ukáže, že druhý ze sčítanců leží v  $U_1$ . Tudíž,  $v \in U_1 + U_2$ . Protože  $v$  byl libovolný vektor z  $V$ , máme  $V = U_1 + U_2$ .

Ukažme ještě, že  $U_1 \cap U_2 = 0$ . Nechť tedy  $v \in U_1 \cap U_2$ , tj.  $q_1(f)(v) = 0$  a  $q_2(f)(v) = 0$ . Rovnost (12) platí i po záměně  $p \leftrightarrow q$  (protože  $p_i(f)$  a  $q_i(f)$  spolu komutují podle Důsledku Tvrzení 11.5.7), načež

$$v = p_1(f)(q_1(f)(v)) + p_2(f)(q_2(f)(v)) = p_1(f)(0) + p_2(f)(0) = 0,$$

protože  $p_1(f), p_2(f)$  jsou lineární zobrazení. Dokázali jsme tedy, že  $V = U_1 \dot{+} U_2$ .

Obecný případ  $n > 2$  se dokáže indukcí (cvičení).

(3) Polynom  $q_i$  je anulujícím polynomem transformace  $f|_{U_i}$ , protože  $\text{Ker } q_i(f) = U_i$ , načež

$$\text{Ker } q_i(f|_{U_i}) = \text{Ker}(q_i(f)|_{U_i}) = U_i \cap \text{Ker } q_i(f) = U_i, \text{ a tedy } q_i(f|_{U_i}) = 0. \quad \square$$

**Tvrzení 13.1.4.** *Nechť existuje přímý rozklad  $V = U_1 \dot{+} U_2$ , kde  $U_1, U_2$  jsou invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci  $f$ . Zvolme nějakou bázi  $(e_1, \dots, e_m)$  podprostoru  $U_1$  a nějakou bázi  $(e_{m+1}, \dots, e_n)$  podprostoru  $U_2$ . Pak  $(e_1, \dots, e_n)$  je báze prostoru  $V$  a transformace  $f$  v ní má matici tvaru*

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_m^1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m & \dots & A_m^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{m+1}^{m+1} & \dots & A_n^{m+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{m+1}^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix}.$$

Označíme-li

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^m & \dots & A_m^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{m+1}^{m+1} & \dots & A_n^{m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m+1}^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix},$$

pak  $A_i$  je matice lineární transformace  $f|_{U_i}$ .

*Důkaz.* Ověřte, že  $(e_1, \dots, e_n)$  je báze prostoru  $V$ .

Prvních  $m$  sloupků matice  $A$  je tvořeno souřadnicemi vektorů  $f(e_1), \dots, f(e_m)$  v bázi  $(e_1, \dots, e_n)$ . Vektory  $f(e_1), \dots, f(e_m)$  ovšem leží v  $U_1$  s bázi  $(e_1, \dots, e_m)$ , takže koeficienty u vektorů  $e_{m+1}, \dots, e_n$  v příslušné lineární kombinaci budou nulové.

Ověřte, že  $A_1$  je matice lineární transformace  $f|_{U_1}$  vzhledem k bázi  $(e_1, \dots, e_m)$ .

Zbytek analogicky.  $\square$

O shora uvedené matici  $A$  říkáme, že je v *blokově diagonálním tvaru* s bloky  $A_1, A_2$  na diagonále. Stručně zapisujeme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Říkáme též, že  $A$  je *přímý součet submatic*  $A_1$  a  $A_2$ .

Podobně se v případě přímého součtu  $V = U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$  invariantních podprostorů  $U_1, \dots, U_n$  matice zobrazení  $f$  rozpadá na přímý součet submatic  $A_1, \dots, A_n$  odpovídajících lineárním zobrazením  $f|_{U_1}, \dots, f|_{U_n}$ :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

O matici  $A$  rovněž pravíme, že je *blokově diagonální*.

V ideálním případě lze prostor  $V$  rozložit na přímý součet jednorozměrných invariantních podprostorů, generovaných vlastními vektory, což je nám již známý případ diagonalizovatelné matice.

**Příklad.** Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je  $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x - 1)(x^2 - 4x + 5)$  (ověřte). Vidíme, že polynom  $\chi_A$  je součinem nesoudělných polynomů  $q_1 = x - 1$  a  $q_2 = x^2 - 4x + 5$ .

Matice  $A$  představuje lineární zobrazení  $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $u \mapsto Au$ . Počítejme  $U_1 = \text{Ker } q_1(\alpha) = \text{Ker}(\alpha - \text{id})$ . Jádro  $\text{Ker}(\alpha - \text{id})$  vypočteme řešením rovnice  $(\alpha - \text{id})(u) = 0$ , což je homogenní soustava s maticí

$$q_1(A) = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a fundamentálním řešením  $e_1 = (1, 1, 1)$  (ověřte). Dostáváme jednorozměrný invariantní podprostor

$$U_1 = \text{Ker } q_1(\alpha) = \llbracket (1, 1, 1) \rrbracket.$$

Podobně  $U_2 = \text{Ker } q_2(\alpha) = \text{Ker}(\alpha^2 - 4\alpha + 5 \text{id})$ . Toto jádro vypočteme řešením rovnice

$$(\alpha^2 - 4\alpha + 5 \text{id})(u) = 0,$$

což je homogenní soustava s maticí

$$q_2(A) = A^2 - 4A + 5E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a fundamentálním řešením  $e_2 = (0, 0, 1)$ ,  $e_3 = (1, -1, 0)$  (ověřte). Dostáváme dvojrozměrný invariantní podprostor

$$U_2 = \text{Ker } q_2(\alpha) = \llbracket (0, 0, 1), (1, -1, 0) \rrbracket.$$

Získali jsme (a) přímý rozklad  $\mathbb{R}^3 = U_1 \dot{+} U_2$  na invariantní podprostory  $U_1$  a  $U_2$ ; (b) „novou“ bázi  $(e_1, e_2, e_3)$ . Matici přechodu od „staré“ kanonické báze k „nové“ bázi označme  $Q$ . Inverzní matice  $Q^{-1}$  je matice přechodu od „nové“ báze ke kanonické bázi. Tedy

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení  $\alpha$  vzhledem k „nové“ bázi je tedy blokově diagonální matice

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

**Příklad.** Nechť  $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je lineární zobrazení, jehož matice vzhledem ke kanonické („staré“) bázi  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice  $A$  je  $\chi_A = -x^2(x - 2)$  a můžeme jej zapsat jako součin nesoudělných polynomů  $q_1 = -x^2$  a  $q_2 = x - 2$ . Vlastní čísla jsou  $\lambda_1 = 0$  a  $\lambda_2 = 2$ .

Tedy

$$q_1(A) = -A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -6 & 6 & -12 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad q_2(A) = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom  $U_1 = \text{Ker } q_1(A) = \text{Ker}(-A^2)$  je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí  $-A^2$  a  $U_2 = \text{Ker } q_2(A) = \text{Ker}(A - 2E)$  je množina všech řešení

homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí  $A - 2E$ . Tedy  $U_1 = \llbracket (-2, 0, 1), (1, 1, 0) \rrbracket$  a  $U_2 = \llbracket (1, 3, 2) \rrbracket$ .

Takže prostor  $\mathbb{R}^3$  je přímým součtem invariantních podprostorů  $U_1, U_2$  a vektory  $(-2, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 3, 2)$  tvoří „novou“ bázi prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Matice přechodu od „staré“ báze k „nové“ bázi je

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 5/2 & -3 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a matice zobrazení  $\alpha$  vzhledem k „nové“ bázi je

$$A' = Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \square$$