

4. přednáška, 18. 3. 2025

Tvrzení 11.4.3. *Buď α izomorfismus a A jeho matice vzhledem k nějakým bázím. Pak A je invertibilní a A^{-1} je matice inverzního izomorfismu α^{-1} .*

Důkaz. Buď $\alpha: U \rightarrow V$ a buď B matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1}: V \rightarrow U$ vzhledem k příslušným bázím. Matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_U$ vzhledem k bázi prostoru U je jednotková matice E a podle předchozího tvrzení je to matice BA . Čili, $BA = E$, A je tedy invertibilní a $A^{-1} = B$. $\square$

Důsledek. *Každá matice přechodu od báze k bázi je invertibilní.*

Důkaz. Podle uvedených definic matice přechodu je totéž co matice identity, což je izomorfismus. $\square$

Tvrzení 11.4.4. *Buď U vektorový prostor se starou bází $(u_1, \dots, u_n)$ a novou bází $(u'_1, \dots, u'_n)$, buď Q matice přechodu od staré báze k nové bázi. Buď V vektorový prostor se starou bází $(v_1, \dots, v_m)$ a novou bází $(v'_1, \dots, v'_m)$, buď R matice přechodu od staré báze k nové bázi. Buď $\alpha: U \rightarrow V$ lineární zobrazení, buď A matice zobrazení α vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_n)$ a $(v_1, \dots, v_m)$ a buď A' matice zobrazení α vzhledem k bázím $(u'_1, \dots, u'_n)$ a $(v'_1, \dots, v'_m)$. Pak*

$$A' = RAQ^{-1}.$$

Důkaz. Situaci můžeme znázornit diagramem

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} U \\ (u_1, \dots, u_n) \end{array}} & \xrightarrow[A]{\alpha} & \boxed{\begin{array}{c} V \\ (v_1, \dots, v_m) \end{array}} \\ \text{id}_U \downarrow Q & & \text{id}_V \downarrow R \\ \boxed{\begin{array}{c} U \\ (u'_1, \dots, u'_n) \end{array}} & \xrightarrow[A']{\alpha} & \boxed{\begin{array}{c} V \\ (v'_1, \dots, v'_m) \end{array}} \end{array}$$

V rozích stojí vektorové prostory s vyznačenými bázemi, šipky označují lineární zobrazení a jsou u nich uvedeny také matice těchto zobrazení. Platí $\alpha \circ \text{id}_U = \text{id}_V \circ \alpha$ a také $\alpha = \text{id}_V \circ \alpha \circ \text{id}_U^{-1}$. Podle Tvrzení 11.4.2 o matici složeného zobrazení potom

$$A'Q = RA \quad \text{a také} \quad A' = RAQ^{-1}. \quad \square$$

Příklad. Mějme $\alpha: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, $f \mapsto f'$. Je to tedy zobrazení z prostoru polynomů stupně nejvýše 2 do prostoru polynomů stupně nejvýše 1, které polynomu přiřazuje jeho derivaci.

(1) Nejprve uvažujme (staré) báze $(1, x, x^2)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ a $(1, x)$ v $\mathbb{R}_1[x]$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(1, x, x^2)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(1, x)$.

$$\begin{array}{ll} \alpha(1) = 0, & \text{souřadnice vektoru } 0 \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (0, 0); \\ \alpha(x) = 1, & \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (1, 0); \\ \alpha(x^2) = 2x, & \text{souřadnice vektoru } 2x \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (0, 2). \end{array}$$

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(1, x, x^2)$ a $(1, x)$ tedy je

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Nyní uvažujme (nové) báze $(x^2, x+1, x)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ a $(x+1, 1)$ v $\mathbb{R}_1[x]$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(x^2, x+1, x)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(x+1, 1)$.

$$\begin{aligned}\alpha(x^2) &= 2x, & \text{souřadnice vektoru } 2x \text{ v bázi } (x+1, 1) \text{ jsou } (2, -2); \\ \alpha(x+1) &= 1, & \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (x+1, 1) \text{ jsou } (0, 1); \\ \alpha(x) &= 1, & \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (x+1, 1) \text{ jsou } (0, 1).\end{aligned}$$

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(x^2, x+1, x)$ a $(x+1, 1)$ tedy je

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Například, $\alpha(3x^2+2x+7) = 6x+2$. Vektor $3x^2+2x+7$ má staré souřadnice $a = (7, 2, 3)$ a nové souřadnice $a' = (3, 7, -5)$. Vektor $6x+2$ má staré souřadnice $b = (2, 6)$ a nové souřadnice $b' = (6, -4)$. Ověřte. A platí

$$A_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = b$$

a

$$A_2 \cdot a' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = b'.$$

Matice přechodu od staré báze $(1, x, x^2)$ k nové bázi $(x^2, x+1, x)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ je

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od staré báze $(1, x)$ k nové bázi $(x+1, 1)$ v $\mathbb{R}_1[x]$ je

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A platí

$$\begin{aligned}Q_2 \cdot A_1 \cdot Q_3^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2. \quad \square\end{aligned}$$

11.5. Algebraická struktura na množině lineárních zobrazení

Definice 11.5.1. Buďte U, V vektorové prostory nad polem P a $f, g: U \rightarrow V$ zobrazení.

(1) Zobrazení $f + g: U \rightarrow V$, zadané předpisem

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u)$$

pro libovolný vektor $u \in U$, je *součet* zobrazení f a g .

(2) Buď $c \in P$. Zobrazení $cf: U \rightarrow V$, zadané předpisem

$$(cf)(u) = c \cdot f(u)$$

pro libovolný vektor $u \in U$, je *c-násobek* zobrazení f .

Tvrzení 11.5.1. *Budte U, V vektorové prostory nad polem P , $f, g: U \rightarrow V$ lineární zobrazení a $c \in P$. Pak zobrazení $f + g$, cf jsou lineární.*

Důkaz. Cvičení. □

Budte U, V vektorové prostory nad polem P . Množinu všech lineárních zobrazení z U do V označme $\text{Hom}_P(U, V)$. Tedy

$$\text{Hom}_P(U, V) = \{f: U \rightarrow V \mid f \text{ je lineární zobrazení nad polem } P\}.$$

Tvrzení 11.5.2. *Budte U, V vektorové prostory nad polem P . Pak množina $\text{Hom}_P(U, V)$ s operacemi sčítání zobrazení a násobení zobrazení skalárem je vektorový prostor nad polem P .*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 11.5.3. *Budte U, V vektorové prostory nad polem P , $c \in P$, $f, g: U \rightarrow V$ lineární zobrazení a A, B jejich matice vzhledem ke zvoleným bázím. Pak*

- (1) $A + B$ je matice lineárního zobrazení $f + g$ vzhledem ke stejným bázím,
- (2) cA je matice lineárního zobrazení cf vzhledem ke stejným bázím.

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 11.5.4. *Budte U, V konečněrozměrné vektorové prostory nad polem P , $\dim U = n$ a $\dim V = m$. Pak vektorový prostor $\text{Hom}_P(U, V)$ je izomorfní s prostorem $P^{m \times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad polem P .*

Důkaz. Tvrzení dokážeme tak, že najdeme příslušný izomorfismus. Budte u báze U , v báze V a $\varphi: \text{Hom}_P(U, V) \rightarrow P^{m \times n}$ zobrazení, které každému lineárnímu zobrazení $f: U \rightarrow V$ přiřadí jeho matici vzhledem k bázím u a v .

Potom φ je bijekce, protože každá matice typu $m \times n$ je maticí právě jednoho lineárního zobrazení $U \rightarrow V$ vzhledem k uvedeným bázím (ověřte podrobně). Navíc, podle předchozího tvrzení φ je lineární, protože matice zobrazení $f + g$ je součet matic jednotlivých zobrazení f a g a matice zobrazení cf je c -násobek matice zobrazení f . □

Definice 11.5.2. Lineární zobrazení $V \rightarrow V$ je *lineární transformace* vektorového prostoru V nebo také *lineární operátor* na vektorovém prostoru V .

Na množině $\text{Hom}_P(V, V)$ můžeme navíc uvažovat binární operaci $\circ$ skládání lineárních transformací s neutrálním prvkem id_V (množina s asociativní binární operací s neutrálním prvkem je *monoid*).

Tvrzení 11.5.5. *Bud' V vektorový prostor nad polem P . Pak pro libovolná $f, g, h \in \text{Hom}_P(V, V)$ a $c \in P$ platí*

$$\begin{aligned} f \circ (g + h) &= f \circ g + f \circ h, \\ (f + g) \circ h &= f \circ h + g \circ h, \\ f \circ (cg) &= (cf) \circ g = c(f \circ g). \end{aligned}$$

Důkaz. Cvičení. □

Algebraická struktura, která je současně monoid i vektorový prostor nad polem P a platí pro ni identity uvedené v předchozím tvrzení, je *asociativní P -algebra*. Tudíž, $\text{Hom}_P(V, V)$ je asociativní P -algebra.

Jiný příklad asociativní P -algebry je množina $P^{n \times n} (= \text{gl}(n, P))$ všech čtvercových matic typu $n \times n$ nad polem P vzhledem k binárním operacím násobení a sčítání matic a k operaci násobení skalárem (ověřte).

Podle předchozích tvrzení v konečněrozměrném případě P -algebra $\text{Hom}_P(V, V)$ je izomorfní P -algebře $\text{gl}(n, P)$.

Pro libovolné celé nezáporné číslo k zavedme lineární transformaci $f^k: V \rightarrow V$ předpisem

$$f^k(v) = \underbrace{f(f(\cdots f(v)\cdots))}_k \text{ pro libovolné } v \in V, \text{ tj. } f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_k.$$

Tedy, $f^0 = \text{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ a $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Definice 11.5.3. Buď $p = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ polynom. Buď $f: V \rightarrow V$ lineární transformace vektorového prostoru V nad polem P a A čtvercová matice nad polem P . Položme

$$p(f) = a_m f^m + \cdots + a_1 f + a_0 \text{id}_V,$$

$$p(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E,$$

kde E je jednotková matice stejného rozměru jako matice A .

Lineární transformace $p(f)$, resp. matice $p(A)$ vznikla *dosazením lineární transformace f , resp. matice A do polynomu p .*

Hodnota transformace $p(f)$ ve vektoru $v \in V$ se zapisuje $p(f)(v)$.

Příklad. Nechtě $p = x^2 - 2x + 2$. Pak pro libovolnou lineární transformaci $f: V \rightarrow V$ máme $p(f) = f^2 - 2f + 2\text{id}$ a pro libovolný vektor $v \in V$ máme $p(f)(v) = f(f(v)) - 2f(v) + 2v$. $\square$

Tvrzení 11.5.6. Buď p polynom a buď A matice lineární transformace f vzhledem k nějaké bázi. Pak $p(A)$ je matice lineární transformace $p(f)$ vzhledem k téže bázi.

Důkaz. Cvičení. $\square$

Tvrzení 11.5.7. Buďte p, q polynomy. Pro libovolnou lineární transformaci f a libovolnou čtvercovou matici A platí

$$(p+q)(f) = p(f) + q(f),$$

$$(pq)(f) = p(f) \circ q(f),$$

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A),$$

$$(pq)(A) = p(A)q(A).$$

Důkaz. Cvičení. $\square$

Důsledek. Buďte p, q polynomy. Pro libovolnou lineární transformaci f a pro libovolnou čtvercovou matici A platí

$$p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f),$$

$$p(A)q(A) = q(A)p(A)$$

(říkáme, že $p(f)$ a $q(f)$ komutují a $p(A)$ a $q(A)$ komutují).