

3. přednáška, 4. 3. 2025

Lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy vektorů libovolné báze:

Tvrzení 11.1.1. *Budte U, V vektorové prostory nad polem P , $(u_1, \dots, u_n)$ báze U . Pak pro každou n -tici $v_1, \dots, v_n \in V$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f: U \rightarrow V$ takové, že $f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$.*

Důkaz. Budte $v_1, \dots, v_n \in V$. Pro $u \in U$ existují $x^1, \dots, x^n \in P$ tak, že $u = x^1 u_1 + \dots + x^n u_n$. Položme $f(u) = x^1 v_1 + \dots + x^n v_n$. Cvičení: ověřte, že $f(u_i) = v_i$, f je lineární a je-li f' zobrazení s těmito vlastnostmi, potom $f' = f$. $\square$

Tvrzení 11.1.2. *Budte $f: U \rightarrow V$ a $g: V \rightarrow W$ lineární zobrazení. Pak $g \circ f: U \rightarrow W$ je lineární zobrazení.*

Důkaz. Budte U, V, W vektorové prostory nad polem P . Pro libovolná $u_1, u_2 \in U$ máme

$$\begin{aligned} (g \circ f)(u_1 + u_2) &= g(f(u_1 + u_2)) = \\ &= g(f(u_1) + f(u_2)) = \\ &= g(f(u_1)) + g(f(u_2)) = \\ &= (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2). \end{aligned}$$

Pro libovolné $u \in U$ a $p \in P$ máme

$$\begin{aligned} (g \circ f)(pu) &= g(f(pu)) = \\ &= g(pf(u)) = \\ &= pg(f(u)) = \\ &= p(g \circ f)(u). \end{aligned}$$

$\square$

11.2. Jádro a obraz

Definice 11.2.1. Bud' $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Označme

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{u \in U \mid f(u) = 0\}, \\ \text{Im } f &= f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}. \end{aligned}$$

$\text{Ker } f$ je *jádro* a $\text{Im } f$ je *obraz* lineárního zobrazení f .

Tvrzení 11.2.1. *Bud' $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Pak*

- (1) $\text{Ker } f$ je podprostor U ,
- (2) $\text{Im } f$ je podprostor V .

Důkaz. (1) (i) $0 \in \text{Ker } f$, protože $f(0) = 0$, (ii) Nechť $a, b \in \text{Ker } f$. Pak $a + b \in \text{Ker } f$, protože $f(a + b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$. (iii) Nechť $a \in \text{Ker } f$, $r \in P$. Pak $ra \in \text{Ker } f$, protože $f(ra) = rf(a) = r \cdot 0 = 0$.

(2) (i) $0 \in \text{Im } f$, protože $f(0) = 0$, (ii) Nechť $a, b \in \text{Im } f$, tedy existují $c, d \in U$ takové, že $f(c) = a$ a $f(d) = b$. Pak $a + b \in \text{Im } f$, protože $f(c + d) = f(c) + f(d) = a + b$. (iii) Nechť $a \in \text{Im } f$, $r \in P$, tedy existuje $b \in U$ takové, že $f(b) = a$. Pak $ra \in \text{Im } f$, protože $f(rb) = rf(b) = ra$. $\square$

Cvičení. (1) Pro lineární zobrazení re z příkladu (9) platí:

$$\text{Im } \text{re} = \mathbb{R}, \quad \text{Ker } \text{re} = \mathbb{R}i = \{ri \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Při rovnoběžném promítání $p: E^3 \rightarrow E^2$ je podprostor $\text{Ker } p$ totožný se směrem promítání, kdežto $\text{Im } p = E^2$.

(3) Při otáčení $\phi_\alpha: E^2 \rightarrow E^2$ o úhel $\alpha \neq 2k\pi$ je $\text{Im } \phi_\alpha = E^2$, zatímco $\text{Ker } \phi_\alpha$ je nulový podprostor. $\square$

Tvrzení 11.2.2. *Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Pak*

- (1) *f je injektivní právě tehdy, když $\text{Ker } f = 0$,*
- (2) *f je surjektivní právě tehdy, když $\text{Im } f = V$.*

Důkaz. (1) Buď f injektivní, buď u libovolný prvek z $\text{Ker } f$. Pak $f(u) = 0$, ale současně $f(0) = 0$, načež z injektivnosti $u = 0$.

Naopak, nechť $\text{Ker } f = 0$ a nechť $f(a) = f(b)$. Pak $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$, a tedy $a - b \in \text{Ker } f$, načež $a - b = 0$, čili $a = b$.

(2) Zřejmé. $\square$

Jsou-li oba prostory U, V konečněrozměrné, pak se číslo $\dim \text{Ker } f$ nazývá *defekt* a číslo $\dim \text{Im } f$ *hodnost* lineárního zobrazení. Platí o nich následující tvrzení.

Tvrzení 11.2.3. *Buďte U, V konečněrozměrné vektorové prostory a $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Pak*

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim U.$$

Důkaz. Označme $\dim U = n$ a $\dim \text{Ker } f = m$. Buď $(u_1, \dots, u_m)$ báze $\text{Ker } f$ a doplňme ji vektory $u_{m+1}, \dots, u_n$ do báze U .

Potom vektory $f(u_1), \dots, f(u_n)$ generují $f(U) = \text{Im } f$ (ověřte podrobně), přičemž $f(u_1) = \dots = f(u_m) = 0$ a nulový vektor můžeme z množiny generátorů bez následků vyloučit. Zůstane nám tedy množina generátorů $\{f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\}$.

Ukažme, že tato množina je lineárně nezávislá. Nechť

$$x^{m+1}f(u_{m+1}) + \dots + x^n f(u_n) = 0.$$

Potom $f(x^{m+1}u_{m+1} + \dots + x^n u_n) = 0$, čili $x^{m+1}u_{m+1} + \dots + x^n u_n \in \text{Ker } f$ a

$$x^{m+1}u_{m+1} + \dots + x^n u_n = x^1 u_1 + \dots + x^m u_m$$

pro vhodné koeficienty $x^1, \dots, x^m$. Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_n\}$ vyplývá, že všechny koeficienty $x^1, \dots, x^n$ jsou nulové, zejména $x^{m+1} = \dots = x^n = 0$ a množina $\{f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\}$ je tedy lineárně nezávislá.

Máme tedy bázi podprostoru $\text{Im } f$ tvořenou $n - m$ vektory, takže $\dim \text{Im } f = n - m = \dim U - \dim \text{Ker } f$. $\square$

11.3. Izomorfismy

Stejně jako u jiných algebraických struktur, bijektivní homomorfismy se nazývají izomorfismy.

Definice 11.3.1. *Izomorfismus vektorových prostorů je bijektivní lineární zobrazení.*

Tvrzení 11.3.1. *Buďte $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení a $(e_1, \dots, e_n)$ báze U . Potom*

- (1) *f je injektivní právě tehdy, když množina $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je lineárně nezávislá;*
- (2) *f je surjektivní právě tehdy, když vektory $f(e_1), \dots, f(e_n)$ generují V .*

Důkaz. (1) Předpokládejme, že f je injektivní. Nechť

$$x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = 0.$$

Potom $f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = 0$, tj. $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \text{Ker } f$. Z injektivnosti f podle Tvrzení 11.2.2 vyplývá, že $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0$, a z lineární nezávislosti množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ vyplývá, že $x_1 = \dots = x_n = 0$. Tedy, množina $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je lineárně nezávislá.

Předpokládejme, že množina $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je lineárně nezávislá a $f(u_1) = f(u_2)$ pro nějaké $u_1, u_2 \in U$. Tedy $u_1 = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, $u_2 = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ a

$$\begin{aligned} 0 &= f(u_1) - f(u_2) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n) - y_1f(e_1) - \dots - y_nf(e_n) = \\ &= (x_1 - y_1)f(e_1) + \dots + (x_n - y_n)f(e_n). \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ dostaneme $x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0$, čili $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Takže $u_1 = u_2$ a f je injektivní.

(2) Cvičení. □

Důsledek. *Bud' $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení a $(e_1, \dots, e_n)$ báze U . Potom f je izomorfismus právě tehdy, když $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je báze V .*

Tvrzení 11.3.2. *Bud' $f: U \rightarrow V$ izomorfismus. Pak $f^{-1}: V \rightarrow U$ je také izomorfismus.*

Důkaz. Zobrazení f je bijektivní, takže k němu existuje inverzní zobrazení f^{-1} , a to je také bijektivní. Zbývá dokázat, že je lineární. Bud' $v_1, v_2 \in V$. Díky bijektivnosti zobrazení f existují $u_1, u_2 \in U$ takové, že $f(u_1) = v_1$ a $f(u_2) = v_2$. Potom

$$\begin{aligned} f^{-1}(v_1 + v_2) &= f^{-1}(f(u_1) + f(u_2)) = \\ &= f^{-1}(f(u_1 + u_2)) = \\ &= u_1 + u_2 = \\ &= f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

Důkaz homogenity necháme jako cvičení. □

Definice 11.3.2. Vektorové prostory, mezi nimiž existuje izomorfismus, jsou *izomorfní*. Zapisujeme $U \cong V$.

Cvičení. Dokažte, že relace „být izomorfní“ je relace ekvivalence (reflexivní, symetrická, tranzitivní). □

Cvičení. (1) Homotetie $f_c: a \mapsto ca$ z příkladu (3) je izomorfismus právě tehdy, když $c \neq 0$.

(2) Homomorfismus $z \mapsto z^*$ z příkladu (8) je izomorfismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$.

(3) Homomorfismus re z příkladu (9) není izomorfismus (není injektivní).

(4) Otáčení je izomorfismus. Rovnoběžné promítání $E^3 \rightarrow E^2$ není izomorfismus. □

Cvičení. Bud' $f: U \rightarrow V$ izomorfismus konečněrozměrných prostorů. Jestliže $(u_1, \dots, u_n)$ je báze prostoru U , pak $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ je báze prostoru V . Dokažte. Totéž pro množiny generátorů, resp. lineárně nezávislé množiny. □

Izomorfní prostory se z hlediska lineární algebry liší jen v označení prvků a operací, není mezi nimi žádný rozdíl odhalitelný prostředky lineární algebry.

V konečněrozměrném případě je situace obzvlášť příjemná: každý prostor je izomorfní s některým prostorem P^n .

Tvrzení 11.3.3. *Každý konečněrozměrný vektorový prostor U nad polem P je izomorfní s prostorem $P^{\dim U}$.*

Důkaz. Zobrazení $U \rightarrow P^{\dim U}$, které vektorům přiřazuje jejich souřadnice vzhledem k pevně zvolené bázi, je izomorfismus (ověřte podrobně). □

Počítání se souřadnicemi vektorů z U je tedy počítání v izomorfním prostoru $P^{\dim U}$. Na druhé straně, tento izomorfismus závisí na volbě báze, a to je důvod, proč není vhodné prostory U a $P^{\dim U}$ ztotožňovat.

Tvrzení 11.3.4. *Konečněrozměrné vektorové prostory nad stejným polem jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.*

Důkaz. Buď $f: U \rightarrow V$ izomorfismus (mimo jiné, tedy injekce a surjekce). Podle Tvzení 11.2.2 máme $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ a $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$, a proto díky Tvzení 11.2.3 $\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Jestliže $\dim U = \dim V$, pak $U \cong P^{\dim U} = P^{\dim V} \cong V$. $\square$

11.3.1. Přímé součty vektorových (pod)prostorů

Už známe přímý součet prostorů a přímý součet podprostorů. Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ podprostory vektorového prostoru U , pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 + \dots + U_n$ a $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. První z nich je podprostor prostoru U , kdežto druhý není. Nicméně, podle následujícího tvrzení tyto přímé součty jsou izomorfní.

Tvrzení 11.3.5. *Buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru U . Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

- (1) *součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý;*
- (2) *$U_1 + \dots + U_n \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_n$.*

Důkaz. Předpokládejme, že součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý. Buď $p: U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow U_1 + \dots + U_n$, $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 + \dots + u_n$. Zobrazení p je lineární (cvičení). Jelikož součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý, každé $u \in U_1 + \dots + U_n$ lze zapsat právě jedním způsobem jako $u = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_i \in U_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Můžeme tedy definovat zobrazení $U_1 + \dots + U_n \rightarrow U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, $u \mapsto (u_1, \dots, u_n)$. Toto zobrazení je inverzní k p , tudíž p je bijekce, a tedy izomorfismus.

Předpokládejme, že $U_1 + \dots + U_n \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. Potom $\dim(U_1 + \dots + U_n) = \dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$ a podle Tvzení 10.3.3 součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý. $\square$

Cvičení. Dokažte, že zobrazení p z předchozího důkazu je lineární. $\square$

Cvičení. Pro každé $i = 1, \dots, n$ zobrazení $\pi_i: U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow U_i$ zadané předpisem $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_i$ se nazývá i -tá projekce.

Pro každé $i = 1, \dots, n$ zobrazení $\iota_i: U_i \rightarrow U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ zadané předpisem $u \mapsto (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$, kde u stojí na i -tém místě, se nazývá vložení i -tého sčítance.

Ukažte, že projekce π_i a vložení ι_i jsou lineární zobrazení. Spočtete $\pi_i \circ \iota_j$. $\square$

11.4. Matice lineárního zobrazení

V příkladu (7) v 11.1 pro každou matici A typu $m \times n$ nad polem P je $f_A: P^n \rightarrow P^m$, $x \mapsto Ax$, lineární zobrazení.

Na druhou stranu, pro každé lineární zobrazení $f: P^n \rightarrow P^m$ existuje jediná matice A taková, že $f = f_A$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ buď e_i i -tý vektor kanonické báze P^n , tedy $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde 1 je na i -tém místě. Potom pro libovolné $x = (x^1, \dots, x^n) \in P^n$ platí

$$f(x) = f(x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) = x^1 f(e_1) + \dots + x^n f(e_n).$$

Čili pro matici A , jejíž sloupky jsou $f(e_1), \dots, f(e_n)$, platí $f(x) = Ax$ a $f = f_A$.

Obdobně lze libovolnému lineárnímu zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory přiřadit matici, která toto zobrazení popisuje, a to sice matici reprezentující příslušné lineární zobrazení mezi prostory souřadnic vektorů vzhledem ke zvoleným bázím vektorových prostorů.

Definice 11.4.1. Buďte U, V vektorové prostory, $(u_1, \dots, u_n)$ báze U a $(v_1, \dots, v_m)$ báze V . Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Matice A typu $m \times n$, jejíž i -tý sloupek je tvořen souřadnicemi vektoru $f(u_i) \in V$ v bázi $(v_1, \dots, v_m)$, je *matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_n)$ a $(v_1, \dots, v_m)$* .

Přesněji, A_i^j je j -tá souřadnice obrazu $f(u_i)$ v bázi $(v_1, \dots, v_m)$. Platí tedy

$$f(u_i) = \sum_j A_i^j v_j.$$

Tvrzení 11.4.1. Buďte U, V vektorové prostory, $(u_1, \dots, u_n)$ báze U , $(v_1, \dots, v_m)$ báze V , $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení, $u \in U$, A matice f , $x = (x^1, \dots, x^n)$ souřadnice u , $y = (y^1, \dots, y^m)$ souřadnice $f(u) \in V$ vzhledem ke zvoleným bázím. Pak

$$y = Ax.$$

Důkaz. Jelikož $u = \sum_i x^i u_i$, tak

$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(\sum_i x^i u_i\right) = \sum_i f(x^i u_i) = \sum_i x^i f(u_i) = \sum_i x^i \sum_j A_i^j v_j = \\ &= \sum_j \sum_i x^i A_i^j v_j = \left(\sum_i x^i A_i^1\right) v_1 + \dots + \left(\sum_i x^i A_i^m\right) v_m. \end{aligned}$$

Čili j -tá souřadnice vektoru $f(u)$ v bázi $(v_1, \dots, v_m)$ je $y^j = \sum_i x^i A_i^j = \sum_i A_i^j x^i$, což je právě výsledek získávaný při násobení matic A a x . $\square$

Příklad. Mějme $\alpha: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, $f \mapsto f'$. Je to tedy zobrazení z prostoru polynomů stupně nejvýše 2 do prostoru polynomů stupně nejvýše 1, které polynomu přiřazuje jeho derivaci. Ověřte, že se jedná o lineární zobrazení.

V $\mathbb{R}_2[x]$ uvažujme bázi $(1, x, x^2)$ a v $\mathbb{R}_1[x]$ bázi $(1, x)$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(1, x, x^2)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(1, x)$.

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= 0, & \text{souřadnice vektoru } 0 \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (0, 0); \\ \alpha(x) &= 1, & \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (1, 0); \\ \alpha(x^2) &= 2x, & \text{souřadnice vektoru } 2x \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (0, 2). \end{aligned}$$

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(1, x, x^2)$ a $(1, x)$ tedy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Například, $\alpha(3x^2 + 2x + 7) = 6x + 2$. Vektor $3x^2 + 2x + 7$ má v bázi $(1, x, x^2)$ souřadnice $x = (7, 2, 3)$ a vektor $6x + 2$ má v bázi $(1, x)$ souřadnice $y = (2, 6)$. Ověřte. A platí

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = y. \quad \square$$

Příklad. Matice identického zobrazení $\text{id}: U \rightarrow U$, $\text{id}(u) = u$, vzhledem k bázím $(e_1, \dots, e_n)$ a $(e'_1, \dots, e'_n)$ (v tomto pořadí) je matice přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(e'_1, \dots, e'_n)$. $\square$

Tvrzení 11.4.2. Buďte U, V, W vektorové prostory, $(u_1, \dots, u_m)$ báze U , $(v_1, \dots, v_n)$ báze V , $(w_1, \dots, w_p)$ báze W . Buďte $\alpha: U \rightarrow V$, $\beta: V \rightarrow W$ lineární zobrazení. Buď A matice zobrazení α vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_m)$ a $(v_1, \dots, v_n)$, buď B matice zobrazení β vzhledem k bázím $(v_1, \dots, v_n)$ a $(w_1, \dots, w_p)$. Potom BA je matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_m)$ a $(w_1, \dots, w_p)$.

Důkaz. Jelikož $\alpha(u_i) = \sum_j A_i^j v_j$ a $\beta(v_j) = \sum_k B_j^k w_k$, tak

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(u_i) &= \beta(\alpha(u_i)) = \beta\left(\sum_j A_i^j v_j\right) = \sum_j A_i^j \beta(v_j) = \sum_j A_i^j \sum_k B_j^k w_k = \\ &= \sum_{j,k} A_i^j B_j^k w_k = \sum_k \sum_j A_i^j B_j^k w_k = \\ &= \left(\sum_j A_i^j B_j^1\right) w_1 + \cdots + \left(\sum_j A_i^j B_j^p\right) w_p. \end{aligned}$$

Čili v k -tém řádku i -tého sloupku matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ je $\sum_j A_i^j B_j^k = \sum_j B_j^k A_i^j$, což je totéž, co dostaneme při součinu $B \cdot A$. $\square$