

2. přednáška, 25. 2. 2025

10.2. Průnik a součet podprostorů

Tvrzení 10.2.1. *Budte U_1, U_2 podprostory V . Pak $U_1 \cap U_2$ je podprostor V .*

Důkaz. Ukážeme, že množina $U_1 \cap U_2$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): $0 \in U_1 \cap U_2$, protože $0 \in U_1$ a $0 \in U_2$. Podmínka (ii): Nechť $u_1, u_2 \in U_1 \cap U_2$. Pak $u_1, u_2 \in U_1$, takže $u_1 + u_2 \in U_1$, a zároveň $u_1, u_2 \in U_2$, takže $u_1 + u_2 \in U_2$. Tudíž, $u_1 + u_2 \in U_1 \cap U_2$. Podmínka (iii): Cvičení. $\square$

Cvičení. Průnik libovolného systému podprostorů je podprostor. $\square$

Definice 10.2.1. Budte $U_1, \dots, U_n$ podprostory V . Označme

$$U_1 + \dots + U_n = \{u_1 + \dots + u_n \mid u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n\}.$$

Množina $U_1 + \dots + U_n$ je *součet* podprostorů $U_1, \dots, U_n$.

Prvky množiny $U_1 + \dots + U_n$ jsou všechny vektory $v \in V$, pro něž existuje vyjádření $v = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$.

Tvrzení 10.2.2. *Budte $U_1, \dots, U_n$ podprostory V . Pak $U_1 + \dots + U_n$ je podprostor V .*

Důkaz. Ukážeme, že množina $U_1 + \dots + U_n$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): $0 = 0 + \dots + 0 \in U_1 + \dots + U_n$, kde $0 \in U_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Podmínka (ii): Nechť $u, v \in U_1 + \dots + U_n$. Pak $u = u_1 + \dots + u_n$ a $v = v_1 + \dots + v_n$, kde $u_i, v_i \in U_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, načež $u + v = u_1 + \dots + u_n + v_1 + \dots + v_n = (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n) \in U_1 + \dots + U_n$. Podmínka (iii): Cvičení. $\square$

Cvičení. Dokažte, že (1) $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$.

(2) Je-li U podprostor ve V takový, že $U_1 \subseteq U$ a $U_2 \subseteq U$, pak $U_1 + U_2 \subseteq U$.

Návod: (1) Je-li $u_1 \in U_1$ libovolný prvek, pak $u_1 = u_1 + 0 \in U_1 + U_2$.

(2) Buď $u_1 + u_2$ obecný vektor z $U_1 + U_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Protože $U_1, U_2 \subseteq U$, máme $u_1, u_2 \in U$, načež $u_1 + u_2 \in U$. $\square$

Množina $S(V)$ všech podprostorů vektorového prostoru V je uspořádána inkluzí $\subseteq$. Z dokázaných tvrzení o průnicích a součtech podprostorů plyne, že množina $S(V)$ je svazově uspořádána, přičemž infimem je průnik a supremem je součet podprostorů. Tudíž, $(S(V), \cap, +)$ je svaz.

Tvrzení 10.2.3. *Budte U_1, U_2 konečněrozměrné podprostory jednoho vektorového prostoru. Pak*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Důkaz. Označme $\dim U_1 = n_1$, $\dim U_2 = n_2$ a $\dim(U_1 \cap U_2) = m$. Buď $\{u_1, \dots, u_m\}$ báze v $U_1 \cap U_2$. To je lineárně nezávislá množina vektorů v U_1 i v U_2 a můžeme ji tedy v obou prostorech doplnit do báze vektory $u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1$ resp. $u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2$. Ukažme, že $\{u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2\}$ je báze v $U_1 + U_2$.

Nejdříve ukážeme, že množina $\{u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2\}$ je lineárně nezávislá. Nechť

$$c^1 u_1 + \dots + c^m u_m + c_1^1 u_1^1 + \dots + c_{n_1-m}^1 u_{n_1-m}^1 + c_2^1 u_1^2 + \dots + c_{n_2-m}^2 u_{n_2-m}^2 = 0$$

pro nějaké skaláry $c^1, \dots, c^m, c_1^1, \dots, c_1^{n_1-m}, c_2^1, \dots, c_2^{n_2-m} \in P$. Pak

$$c^1 u_1 + \dots + c^m u_m + c_1^1 u_1^1 + \dots + c_1^{n_1-m} u_{n_1-m}^1 = -c_2^1 u_1^2 - \dots - c_2^{n_2-m} u_{n_2-m}^2,$$

kde na levé straně je prvek z U_1 a na pravé prvek z U_2 , ale protože jsou si rovny, leží v $U_1 \cap U_2$, a lze je jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_m$. Vyjádřeme tak vektor na pravé straně: existují skaláry $x^1, \dots, x^m \in P$ takové, že

$$x^1 u_1 + \dots + x^m u_m = -c_2^1 u_1^2 - \dots - c_2^{n_2-m} u_{n_2-m}^2.$$

Z nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2\}$ (je to báze v U_2) plyne, že

$$x^1 = \dots = x^m = c_2^1 = \dots = c_2^{n_2-m} = 0.$$

Odtud

$$c^1 u_1 + \dots + c^m u_m + c_1^1 u_1^1 + \dots + c_1^{n_1-m} u_{n_1-m}^1 = 0,$$

a z nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1\}$ (je to báze v U_1) plyne, že

$$c^1 = \dots = c^m = c_1^1 = \dots = c_1^{n_1-m} = 0.$$

Všechny koeficienty $c^1, \dots, c^m, c_1^1, \dots, c_1^{n_1-m}, c_2^1, \dots, c_2^{n_2-m}$ jsou tedy nulové, takže množina $\{u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2\}$ je lineárně nezávislá.

Snadno se dokáže, že vektory $u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2$ generují $U_1 + U_2$ (cvičení).

Máme tedy bázi v $U_1 + U_2$ o $m + (n_1 - m) + (n_2 - m) = n_1 + n_2 - m$ vektorech, takže $\dim(U_1 + U_2) = n_1 + n_2 - m = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$. $\square$

Příklad. V prostoru E^3 buď $U \subset E^3$ nějaká rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U . Pak U je podprostor a podobně L je podprostor, přičemž evidentně $U \cap L = \{0\}$. Proto $\dim(U + L) = \dim U + \dim L - \dim(U \cap L) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim E^3$. Tudíž, $E^3 = U + L$ a každý vektor $v \in E^3$ je součtem $v = u + l$, kde $u \in U$ a $l \in L$. Jak najdeme vektory u, l , je-li dán vektor v ? $\square$

Cvičení. Buďte U_1, U_2 podprostory ve vektorovém prostoru V , nechť $\dim U_1 + \dim U_2 > \dim V$. Ukažte, že existuje nenulový vektor $u \in U_1 \cap U_2$. $\square$

Cvičení. Ukažte, že $\llbracket u_1, \dots, u_n \rrbracket + \llbracket v_1, \dots, v_m \rrbracket = \llbracket u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \rrbracket$. $\square$

10.3. Přímý součet podprostorů

Definice 10.3.1. Buď V vektorový prostor nad polem P , buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory V . Součet $U_1 + \dots + U_n$ je *přímý*, jestliže každý vektor $v \in U_1 + \dots + U_n$ lze zapsat *právě jedním způsobem* jako součet $v = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$. Přímý součet zapisujeme s tečkami: $U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$.

Příklad. Nechť $U_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in P\}$, $U_2 = \{(0, y, 0) \mid y \in P\}$, $U_3 = \{(0, 0, z) \mid z \in P\}$. Pak $P^3 = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} U_3$, protože libovolný vektor $u = (x, y, z) \in P^3$ má jediné vyjádření ve tvaru součtu $u = u_1 + u_2 + u_3$, kde $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3$, a sice $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$. $\square$

Tvrzení 10.3.1. Buďte U_1, U_2 podprostory V . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;

(ii) $V = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = 0$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Je-li $V = U_1 + U_2$, pak každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$, čili $V = U_1 + U_2$. Ukažme, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Buď $v \in U_1 \cap U_2$. Pak máme dva rozklady vektoru v na sčítance z U_1 a U_2 , a sice $v = 0 + v$ a $v = v + 0$. Totožnost obou rozkladů znamená, že $v = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Je-li $V = U_1 + U_2$, pak každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$. Dokážeme ještě jednoznačnost vektorů u_1, u_2 : Pokud je u'_1, u'_2 libovolná dvojice vektorů taková, že $v = u'_1 + u'_2$, pak

$$0 = v - v = (u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2),$$

a tedy $u_1 - u'_1 = -(u_2 - u'_2)$. Vektor $u_1 - u'_1 \in U_1$ je roven vektoru $-(u_2 - u'_2) \in U_2$, proto leží v průniku $U_1 \cap U_2$, což je nulový prostor. Tudíž, $u_1 - u'_1 = 0$ a $u_2 - u'_2 = 0$. $\square$

Příklad. (1) $V = V + 0$ pro libovolný vektorový prostor V .

(2) Prostor E^3 je přímým součtem $U + L$, je-li $U \subset E^3$ libovolná rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U . $\square$

V případě konečněrozměrných podprostorů máme jednoduché kritérium.

Tvrzení 10.3.2. *Buďte U_1, U_2 podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru V takové, že $V = U_1 + U_2$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) $V = U_1 + U_2$;
- (ii) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nechť $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$. Potom $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V = 0$, čili $U_1 \cap U_2 = 0$. $\square$

Cvičení. Buďte $V = U_1 + U_2$, $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1)$ báze podprostoru U_1 , $(e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ báze podprostoru U_2 . Pak $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ je báze prostoru V . Dokažte. $\square$

Cvičení. Buď $m < n$, buď $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru V . Pak $V = \llbracket e_1, \dots, e_m \rrbracket + \llbracket e_{m+1}, \dots, e_n \rrbracket$. Dokažte. $\square$

Vzniká otázka, jak jednoduše rozeznat přímý součet n podprostorů při $n > 2$. Mohlo by se zdát, že prostor V je přímým součtem podprostorů $U_1, \dots, U_n$, jestliže je jejich součtem a podprostory $U_1, \dots, U_n$ mají po dvou nulový průnik. Následující příklad ukazuje, že to tak není:

Příklad. Prostor E^3 není přímým součtem $L_1 + L_2 + U$, je-li U rovina procházející počátkem a jsou-li $L_1, L_2 \subset E^3$ různé přímky procházející počátkem, neležící v rovině U .

Skutečně, součet $L_1 + L_2$ je sice přímý, ale má nenulový průnik s rovinou U . Libovolný nenulový vektor $u = l_1 + l_2$ ležící v průniku $(L_1 + L_2) \cap U$ pak má dvojí vyjádření: jako součet $l_1 + l_2 + 0$ a jako součet $0 + 0 + u$. $\square$

Tvrzení 10.3.3. *Buďte $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ podprostory takové, že $V = U_1 + \dots + U_n$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) $V = U_1 + U_2 + \dots + U_n$;
- (ii) $U_1 \cap U_2 = 0, (U_1 + U_2) \cap U_3 = 0, \dots, (U_1 + \dots + U_{n-1}) \cap U_n = 0$.

Je-li navíc prostor V konečněrozměrný, pak je s nimi ekvivalentní i podmínka

$$(iii) \dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_n.$$

Důkaz. Cvičení. □

Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ podprostory nějakého vektorového prostoru V , pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$ a $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. První z nich je podprostor V , kdežto druhý není. Nicméně, tyto přímé součty jsou izomorfní, což plyne z tvrzení uvedeného později v kapitole o lineárních zobrazeních.

Příklad. Buďte $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ a $U_2 = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Potom

$$U_1 \dot{+} U_2 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ je podprostor } \mathbb{R}^3,$$

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \text{ je báze } U_1 \dot{+} U_2 \text{ a}$$

$$\dim(U_1 \dot{+} U_2) = 2.$$

$$U_1 \oplus U_2 = \{((x, 0, 0), (0, y, 0)) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ není podprostor } \mathbb{R}^3,$$

$$\{((1, 0, 0), (0, 0, 0)), ((0, 0, 0), (0, 1, 0))\} \text{ je báze } U_1 \oplus U_2 \text{ a}$$

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = 2. \quad \square$$

10.4. Popis podprostorů P^n homogenními soustavami

Každý podprostor prostoru P^n je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.

Tvrzení 10.4.1. Každý podprostor $U \subseteq P^n$ je množina všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, kde A je vhodná matice typu $m \times n$, přičemž $m = n - \dim U$.

Důkaz. Podprostor U je konečněrozměrný, nechť $U = \llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket$. Je třeba najít matici A takovou, že U je množina všech řešení soustavy $Ax = 0$. Matice A tedy musí mít n sloupků a má platit

$$Av_i = 0 \quad \text{pro každé } i = 1, \dots, k,$$

což je totéž jako

$$AV = 0,$$

kde V je matice s k sloupky $v_1, \dots, v_k$. Transponujeme-li na obou stranách, obdržíme ekvivalentní rovnici

$$V^T A^T = 0.$$

Řádky hledané matice A tedy můžeme získat jako nějaký fundamentální systém řešení homogenní soustavy

$$V^T a = 0, \quad \text{kde } a \text{ je } n\text{-tice (sloupek) neznámých.}$$

Označme Ξ_A , resp. Ξ_{V^T} prostor všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, resp. $V^T a = 0$. Máme $v_i \in \Xi_A$, odkud $\llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket \subseteq \Xi_A$. Přitom platí $\dim \Xi_A = n - \text{rank } A = n - \dim \Xi_{V^T} = n - (n - \text{rank } V^T) = \text{rank } V^T = \dim \llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket$. Tudiž, $\Xi_A = U$. □

Příklad. Buď $U = \llbracket (1, 0, 2) \rrbracket \subset \mathbb{R}^3$. Najdeme soustavu rovnic, jejíž množina všech řešení je právě U .

Podle důkazu předchozího tvrzení je třeba vyřešit soustavu $V^T a = 0$, tedy rovnici

$$1 \cdot a^1 + 0 \cdot a^2 + 2 \cdot a^3 = 0.$$

Neznámá a^1 je hlavní, neznámé a^2, a^3 jsou parametry. Obecné řešení tedy je

$$a^1 = -2 \cdot t^2, \quad a^2 = t^1, \quad a^3 = t^2$$

a vhodnými volbami parametrů dostaneme fundamentální systém řešení

$$(0, 1, 0), \quad (-2, 0, 1).$$

Tudíž, matice hledané homogenní soustavy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Není obtížné najít součet podprostorů zadaných generátory, resp. průnik podprostorů zadaných homogenními soustavami rovnic:

Cvičení. $\llbracket u_1, \dots, v_i \rrbracket + \llbracket u_{i+1}, \dots, u_n \rrbracket = \llbracket u_1, \dots, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n \rrbracket.$ $\square$

Cvičení. $\{x \mid A'x = 0\} \cap \{x \mid A''x = 0\} = \{x \mid Ax = 0\}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}. \quad \square$$

Protože zadání podprostoru generátory umíme převádět na zadání homogenní soustavy rovnic a naopak, umíme najít i součet podprostorů zadaných homogenními soustavami rovnic, resp. průnik podprostorů zadaných generátory.

11. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

11.1. Definice, příklady

Definice 11.1.1. Buďte U, V vektorové prostory nad polem P . Zobrazení $f: U \rightarrow V$ je *lineární*, přesněji *lineární nad polem P* , nebo *homomorfismus vektorových prostorů*, jestliže pro každé vektory $u, u_1, u_2 \in U$ a každý skalár $p \in P$ platí

- (i) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ (aditivita)
 (ii) $f(pu) = pf(u)$. (homogenita)

Příklad. (1) Identické zobrazení $\text{id}: U \rightarrow U$, $\text{id}(a) = a$, je lineární.

(2) Nulové zobrazení $0: U \rightarrow U$, $0(a) = 0$, je lineární.

(3) Násobení skalárem $c \in P$: Zobrazení $f_c: U \rightarrow U$, $f_c(a) = ca$, je lineární. Nazývá se *homotetie*. Všimněte si, že předchozí dva příklady jsou speciální případy pro $c = 1$, resp. $c = 0$.

(4) Zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární nad $\mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje skalár $c \in \mathbb{R}$ takový, že $f(a) = ca$. Dokažte. Návod: Položte $c = f(1)$.

(5) Zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z, x - y)$, je lineární. Ověřte.

(6) Zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(x, y) \mapsto (x + y, x, x - y, y)$, je lineární. Ověřte.

(7) Buď A matice typu $m \times n$ nad polem P . Nechť $f_A: P^n \rightarrow P^m$ je zobrazení takové, že $f_A(x) = Ax$ (přesněji tedy $f_A: P^{n \times 1} \rightarrow P^{m \times 1}$). Čili, obraz n -tice $x = (x^1, \dots, x^n)$ je lineární kombinace sloupků matice A s koeficienty $x^1, \dots, x^n$,

$$f_A(x) = x^1 A_1^\circ + x^2 A_2^\circ + \dots + x^n A_n^\circ.$$

Potom f_A je lineární zobrazení.

(8) Zobrazení $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbb{C}$, je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$. Toto zobrazení není lineární zobrazení nad $\mathbb{C}$. Ověřte.

(9) Zobrazení $\text{re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \text{re } z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z) je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$.

(10) Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak vložení $\iota_U: U \rightarrow V$, $\iota_U(u) = u$, je lineární zobrazení.

(11) Otáčení. Při otáčení Eukleidovské roviny kolem pevného bodu o úhel α se všechny vektory otáčejí o týž úhel α , nezávisle na jejich umístění. Vzniká zobrazení $\phi_\alpha: E^2 \rightarrow E^2$.

Otáčení převádí součet vektorů na součet vektorů a podobně c -násobek vektoru na c -násobek vektoru. Například aditivita se velmi názorně ověří poukazem na to, že otáčením kolem vrcholu se rovnoběžník převádí v rovnoběžník a délka jeho stran a úhlopříček se přitom nemění.

Podobně otáčení kolem pevné osy v trojrozměrném Eukleidovském prostoru představuje lineární zobrazení vektorů $E^3 \rightarrow E^3$.

(12) Rotace $E^3 \rightarrow E^3$.

(13) Rovnoběžné promítání. Promítání Eukleidovského prostoru E^3 do 2-rozměrného podprostoru (průmětny) R ve zvoleném směru L je zobrazení $E^3 \rightarrow R$. Směrem se rozumí libovolný 1-rozměrný podprostor L takový, že $E^3 = L \dot{+} R$. Průmět do roviny R je sčítanec x_R v (jednoznačném) vyjádření $x = x_L + x_R$, kde $x_L \in L$ a $x_R \in R$.

Promítání $p: E^3 \rightarrow R$ je lineární zobrazení. Aditivita se projevuje v tom, že průmětem rovnoběžníka je rovnoběžník.

(14) Projekce na přímku L procházející počátkem $E^2 \rightarrow L$.

(15) Osová souměrnost podle přímky procházející počátkem, $E^2 \rightarrow E^2$ i $E^3 \rightarrow E^3$.

(16) Zobrazení $U \rightarrow P^{\dim U}$ přiřazující vektorům jejich souřadnice vzhledem ke zvolené bázi, viz Tvzení 9.4.4.

(17) Zobrazení $P^{n \times n} \rightarrow P$, $A \mapsto \operatorname{tr} A$, přiřazující matici A typu $n \times n$ nad polem P její stopu $\operatorname{tr} A = \sum_i A_i^i$ (součet prvků na diagonále).

(18) Zobrazení $P[x] \rightarrow P[x]$, kde $P[x]$ je prostor polynomů, přiřazující polynomu jeho derivaci. Derivace může být například i zobrazení $P_n[x] \rightarrow P_{n-1}[x]$, nebo zobrazení z prostoru diferencovatelných funkcí do prostoru všech funkcí.

(19) Zobrazení z prostoru všech integrovatelných funkcí na uzavřeném intervalu do $\mathbb{R}$ přiřazující funkci její určitý integrál. $\square$

Cvičení. Ukažte, že lineární zobrazení $U \rightarrow V$ je homomorfismus abelovských grup $(U, +, 0, -) \rightarrow (V, +, 0, -)$. Speciálně, $f(0) = 0$, $f(-a) = -f(a)$. $\square$

Cvičení. Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Matematickou indukci ukažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_n \in U$ a skaláry $p^1, \dots, p^n$ platí

$$f(p^1 u_1 + \dots + p^n u_n) = p^1 f(u_1) + \dots + p^n f(u_n),$$

tedy obraz lineární kombinace je lineární kombinace obrazů. $\square$