

14.10. Vlastnosti ortogonálního doplňku

Tvrzení 14.10.1. *Nechť V je prostor se skalárním součinem a U jeho konečněrozměrný podprostor. Pak*

- (1) $U^{\perp\perp} = U$,
- (2) $V = U \dot{+} U^{\perp}$,
- (3) *je-li V konečněrozměrný, potom $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$.*

Důkaz. (1) Každý vektor z U je kolmý na $U^{\perp}$, takže $U \subseteq U^{\perp\perp}$. Buď $v \in U^{\perp\perp}$. Tedy v je kolmý na každý vektor z $U^{\perp}$, speciálně i $v \perp (v - v_U)$. Podprostor U je konečněrozměrný, takže existuje v_U . Podle definice ortogonální projekce také $v_U \perp (v - v_U)$. Z toho dostaneme

$$\|v - v_U\|^2 = (v - v_U, v - v_U) = (v, v - v_U) - (v_U, v - v_U) = 0 - 0 = 0,$$

proto $v = v_U$. Jelikož $v_U \in U$, máme $U^{\perp\perp} \subseteq U$ a celkově $U^{\perp\perp} = U$.

(2) Opět, podprostor U je konečněrozměrný, takže ke každému vektoru $v \in V$ existuje jeho ortogonální projekce do U . Platí $v_U \in U$, $(v - v_U) \perp U$, čili $v - v_U \in U^{\perp}$, a $v = v_U + (v - v_U)$. Takže $V = U + U^{\perp}$. Jelikož U a $U^{\perp}$ jsou vzájemně kolmé, v jejich průniku je jen nulový vektor. Z toho vyplývá, že $V = U \dot{+} U^{\perp}$.

(3) Z předchozího bodu a Tvrzení 10.3.2 dostaneme $\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$. $\square$

Tvrzení 14.10.2. *Nechť V je prostor se skalárním součinem, U_1, U_2 jeho konečněrozměrné podprostory. Potom*

$$(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} + U_2^{\perp} = (U_1 \cap U_2)^{\perp}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2 &\Rightarrow (U_1 + U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp}, U_2^{\perp} \Rightarrow (U_1 + U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \\ U_1 \cap U_2 \subseteq U_1, U_2 &\Rightarrow U_1^{\perp}, U_2^{\perp} \subseteq (U_1 \cap U_2)^{\perp} \Rightarrow U_1^{\perp} + U_2^{\perp} \subseteq (U_1 \cap U_2)^{\perp} \end{aligned}$$

V právě dokázaných vztazích místo U_1, U_2 použijeme $U_1^{\perp}, U_2^{\perp}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} (U_1^{\perp} + U_2^{\perp})^{\perp} &\subseteq U_1^{\perp\perp} \cap U_2^{\perp\perp} = U_1 \cap U_2 \Rightarrow (U_1 \cap U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} + U_2^{\perp} \\ U_1 + U_2 &= U_1^{\perp\perp} + U_2^{\perp\perp} \subseteq (U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp})^{\perp} \Rightarrow U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq (U_1 + U_2)^{\perp} \end{aligned}$$

Nakonec, zřejmě

$$U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} + U_2^{\perp}. \quad \square$$

Cvičení. Najděte V, U_1, U_2 takové, že $(U_1 \cap U_2)^{\perp} \not\subseteq U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$. $\square$

14.11. Shodnosti—ortogonální a unitární transformace a matice

14.11.1. Shodnosti—ortogonální a unitární transformace

Shodnost je lineární transformace, která zachovává skalární součin.

Definice 14.11.1. Bud' V prostor se skalárním součinem. Lineární transformace $f: V \rightarrow V$ je *shodnost*, jestliže pro každé $u, v \in V$

$$(f(u), f(v)) = (u, v).$$

V eukleidovském případě se shodnost nazývá také *ortogonální transformace*, v hermiteovském případě se shodnost nazývá také *unitární transformace*.

Tvrzení 14.11.1. *Buď f lineární transformace vektorového prostoru V se skalárním součinem. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (1) f je shodnost;
- (2) f zachovává délky vektorů, tj. $\|f(v)\| = \|v\|$ pro každé $v \in V$;
- (3) f zobrazuje jednotkové vektory na jednotkové vektory;
- (4) f zachovává ortonormalitu, tj. $f(U)$ je ortonormální množina pro každou ortonormální množinu U .

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Je-li f shodnost, pro každé $v \in V$

$$\|f(v)\| = \sqrt{(f(v), f(v))} = \sqrt{(v, v)} = \|v\|.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Předpokládejme, že f zachovává délky vektorů. Potom

$$\begin{aligned} \operatorname{re}(f(u), f(v)) &= && \text{(Lemma 14.1.2)} \\ &= \frac{1}{2}(\|f(u) + f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && \text{(linearita } f) \\ &= \frac{1}{2}(\|f(u + v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && (f \text{ zachovává délky}) \\ &= \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = && \text{(Lemma 14.1.2)} \\ &= \operatorname{re}(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(f(u), f(v)) &= && \text{(Lemma 14.1.2)} \\ &= \frac{1}{2}(\|f(u) + if(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && \text{(linearita } f) \\ &= \frac{1}{2}(\|f(u + iv)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && (f \text{ zachovává délky}) \\ &= \frac{1}{2}(\|u + iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = && \text{(Lemma 14.1.2)} \\ &= \operatorname{im}(u, v). \end{aligned}$$

Tedy,

$$(f(u), f(v)) = (u, v).$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Zřejmé.

(3) $\Rightarrow$ (2) Nechť f zobrazuje jednotkové vektory na jednotkové vektory. Jelikož $f(0) = 0$, $\|f(0)\| = \|0\|$. Buď $v \in V$, $v \neq 0$. Potom $\|v\| \neq 0$ a

$$\begin{aligned} \|f(v)\| &= \left\| f\left(\frac{\|v\|}{\|v\|}v\right) \right\| = && (f \text{ je lineární}) \\ &= \left\| \|v\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = && \text{(Lemma 14.1.1)} \\ &= \|v\| \left\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = && \left(\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1 \Rightarrow \left\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = 1 \right) \\ &= \|v\|. \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (4) Nechť f je shodnost. Buď U ortonormální množina. Potom pro $f(u), f(v) \in f(U)$, $f(u) \neq f(v)$, platí

$$(f(u), f(v)) = (u, v) = 0 \quad \text{a} \quad \|f(u)\| = \|u\| = 1.$$

Čili, $f(U)$ je ortonormální množina.

(4) $\Rightarrow$ (3) Zřejmé. □

Tvrzení 14.11.2. *Buď V vektorový prostor se skalárním součinem, $(e_1, \dots, e_n)$ jeho ortonormální báze a f jeho lineární transformace. Pak f je shodnost právě tehdy, když $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ je ortonormální báze V .*

Důkaz. Implikace “ $\Rightarrow$ ” je snadné cvičení.

Nechť $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ je ortonormální báze. Buďte $u, v \in V$, $u = \sum x^i e_i$, $v = \sum y^i e_i$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ a $y = (y^1, \dots, y^n)$. Potom $f(u) = \sum x^i f(e_i)$, $f(v) = \sum y^i f(e_i)$ a podle Tvzení 14.5.2

$$(u, v) = x^T \bar{y} = (f(u), f(v)). \quad \square$$

Tvrzení 14.11.3. Každá shodnost konečněrozměrného vektorového prostoru se skalárním součinem je izomorfismus.

Důkaz. Shodnost je lineární zobrazení. Je tedy potřeba dokázat již jen bijektivnost. Buď $u \in \text{Ker } f$, tedy $f(u) = 0$. Potom $\|u\| = \|f(u)\| = 0$ a $u = 0$. Takže, $\text{Ker } f = \{0\}$ a f je injektivní.

Dále $\dim \text{Im } f = \dim V - \dim \text{Ker } f = \dim V$, proto $\text{Im } f = V$ a f je surjektivní. $\square$

Tvrzení 14.11.4. Složení shodností je shodnost.

Důkaz. Cvičení. $\square$

14.11.2. Ortogonální a unitární matice

Definice 14.11.2. Čtvercová matice A nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) typu $n \times n$ je *ortogonální* (resp. *unitární*), jestliže $(Au, Av) = (u, v)$ pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), kde $(\cdot, \cdot)$ je standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Připomeňme značení: Pro matici $A = (A_j^i)$ označujeme $\bar{A} = (\overline{A_j^i})$.

Tvrzení 14.11.5. Buď A čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) typu $n \times n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) A je ortogonální (resp. unitární);
- (2) množina sloupků matice A je ortonormální v $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) se standardním skalárním součinem;
- (3) $A^T A = E$ (resp. $\bar{A}^T A = E$);
- (4) $AA^T = E$ (resp. $A\bar{A}^T = E$);
- (5) množina řádků matice A je ortonormální v $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) se standardním skalárním součinem;
- (6) A^T je ortogonální (resp. unitární).

Důkaz. Jen pro reálný případ.

(1) $\Rightarrow$ (2) Buď $(e_1, \dots, e_n)$ kanonická báze $\mathbb{R}^n$. Potom $Ae_i = A_i^\circ$ je i -tý sloupek matice A a platí

$$(A_i^\circ, A_j^\circ) = (Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j) = \delta_i^j,$$

takže množina sloupků matice A je ortonormální.

(2) $\Leftrightarrow$ (3)

$$(A^T A)_j^i = \sum_{k=1}^n (A^T)_k^i A_j^k = \sum_{k=1}^n A_i^k A_j^k = (A_i^\circ, A_j^\circ).$$

(3) $\Rightarrow$ (1) Jestliže $A^T A = E$, potom pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$(Au, Av) = (Au)^T (Av) = u^T A^T Av = u^T E v = u^T v = (u, v).$$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Jestliže $A^T A = E$, potom $A^T = A^{-1}$ a $AA^T = AA^{-1} = E$. Obdobně druhá implikace.

$$(4) \Leftrightarrow (5)$$

$$(AA^T)^i_j = \sum_{k=1}^n A_k^i (A^T)_j^k = \sum_{k=1}^n A_k^i A_k^j = (A^i_\circ, A^j_\circ).$$

(4) $\Rightarrow$ (6) Jestliže $AA^T = E$, potom pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$(A^T u, A^T v) = (A^T u)^T (A^T v) = u^T A A^T v = u^T E v = u^T v = (u, v).$$

(6) $\Rightarrow$ (5) Buď $(e_1, \dots, e_n)$ kanonická báze $\mathbb{R}^n$. Potom $A^T e_i = (A^T)_i^\circ = A^i_\circ$ je i -tý řádek matice A a platí

$$(A^i_\circ, A^j_\circ) = (A^T e_i, A^T e_j) = (e_i, e_j) = \delta_i^j,$$

takže množina řádků matice A je ortonormální. $\square$

Důsledek. Je-li A ortogonální (resp. unitární) matice, pak je regulární a $A^{-1} = A^T$ (resp. $A^{-1} = \overline{A}^T$).

Důkaz. Je-li A ortogonální (resp. unitární) matice, pak podle Tvzení 14.11.5 $A^T A = E$ (resp. $\overline{A}^T A = E$), takže $A^T = A^{-1}$ (resp. $\overline{A}^T = A^{-1}$). $\square$

Tvrzení 14.11.6. Je-li A ortogonální (resp. unitární) matice, pak $\det A = \pm 1$ (resp. $|\det A| = 1$).

Důkaz.

$$1 = \det E = \det(\overline{A}^T A) = \det \overline{A}^T \det A = \overline{\det A} \det A = |\det A|^2$$

Je-li $\det A \in \mathbb{R}$, potom $\det A = \pm 1$. $\square$

Cvičení. Dokažte, že $\det \overline{A}^T = \overline{\det A}$. $\square$

Tvrzení 14.11.7. Součin ortogonálních (resp. unitárních) matic je ortogonální (resp. unitární) matice.

Důkaz. Buďte A, B ortogonální (resp. unitární) matice, čili $A^T A = E$ a $B^T B = E$ (resp. $\overline{A}^T A = E$ a $\overline{B}^T B = E$). Potom

$$(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = E \quad (\text{resp. } \overline{AB}^T AB = \overline{B}^T \overline{A}^T AB = \overline{B}^T B = E). \square$$

14.11.3. Ortogonální transformace a ortogonální matice

Tvrzení 14.11.8. Buď $f: V \rightarrow V$ lineární transformace eukleidovského vektorového prostoru V , buď A její matice vzhledem k ortonormální bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Pak f je shodnost právě tehdy, když je matice A ortogonální.

Důkaz. Sloupce A_j° matice A jsou souřadnice vektorů $f(e_i)$ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$, čili

$$f(e_i) = \sum_k A_k^i e_k.$$

$(e_1, \dots, e_n)$ je ortonormální, takže $(e_i, e_j) = \delta_i^j$.

f je shodnost právě tehdy, když $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ je ortonormální báze, a to je právě tehdy, když

$$\delta_i^j = (f(e_i), f(e_j)),$$

ale

$$\begin{aligned}
 (f(e_i), f(e_j)) &= \left(\sum_k A_i^k e_k, \sum_l A_j^l e_l \right) = \\
 &= \sum_k \sum_l A_i^k A_j^l (e_k, e_l) = \\
 &= \sum_k \sum_l A_i^k A_j^l \delta_k^l = \\
 &= \sum_k A_i^k A_j^k = \\
 &= \sum_k (A^\top)_k^i A_j^k = \\
 &= (A^\top A)_{ij}^i,
 \end{aligned}$$

čili $A^\top A$ je jednotková matice. □

14.11.4. Matice přechodu mezi ortonormálními bázemi

Tvrzení 14.11.9. *Matice přechodu od ortonormální báze k ortonormální bázi prostoru se skalárním součinem je ortogonální (resp. unitární).*

Důkaz. Buď V prostor se skalárním součinem, $e = (e_1, \dots, e_n)$ a $f = (f_1, \dots, f_n)$ jeho ortonormální báze, Q matice přechodu od báze e k bázi f . Podle Tvrzení 14.5.1

$$e_i = \sum_{k=1}^n (e_i, f_k) f_k, \quad \text{čili} \quad Q_i^k = (e_i, f_k).$$

Potom

$$\begin{aligned}
 (\overline{Q}^\top Q)_{ij}^i &= \sum_{k=1}^n (\overline{Q}^\top)_k^i Q_j^k = \sum_{k=1}^n \overline{Q}_i^k Q_j^k = \sum_{k=1}^n \overline{(e_i, f_k)} (e_j, f_k) = \sum_{k=1}^n (e_j, (e_i, f_k) f_k) = \\
 &= (e_j, \sum_{k=1}^n (e_i, f_k) f_k) = (e_j, e_i) = \delta_j^i,
 \end{aligned}$$

takže

$$\overline{Q}^\top Q = E \quad \text{a matice } Q \text{ je ortogonální (resp. unitární).} \quad \square$$

Důsledek. *Buď Q matice přechodu od ortonormální báze k ortonormální bázi eukleidovského prostoru. Potom*

$$\det Q = \begin{cases} 1, & \text{jestliže uvedené báze mají stejnou orientaci,} \\ -1, & \text{jestliže uvedené báze nemají stejnou orientaci.} \end{cases}$$

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Tvrzení 14.11.9 a 14.11.6. □