

10. VEKTOROVÉ PODPROSTORY

10.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Definice 10.1.1. Buďte V vektorový prostor nad polem P a $U \subseteq V$. U je *vektorový podprostor* prostoru V , jestliže

- (i) $0 \in U$;
- (ii) $u_1 + u_2 \in U$ pro každé $u_1, u_2 \in U$ (uzavřenost na sčítání);
- (iii) $pu \in U$ pro každé $u \in U$ a každé $p \in P$ (uzavřenost na násobení skalárem).

Podle (iii) pro každý vektor $u \in U$ máme $-u = (-1) \cdot u \in U$, čili s každým vektorem leží v U i vektor k němu opačný. To spolu s (i) a (ii) znamená, že podprostor je podgrupa abelovské grupy $(V, +, 0, -)$.

Axiomy vektorového prostoru jsou splněny na V a tím spíše na U (cvičení). Tudíž, podobně jako u ostatních algebraických podstruktur, podprostor je sám též vektorovým prostorem.

Příklad. (1) V každém vektorovém prostoru je nulový podprostor obsahující jen nulový vektor.

(2) Každý prostor je sám svým podprostorem.

(3) $\mathbb{R}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$ (ověřte).

(4) $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad polem $\mathbb{R}$ (ověřte). $\square$

Tvrzení 10.1.1. Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic o n neznámých s maticí A nad polem P je podprostor prostoru P^n s dimenzí $n - \text{rank } A$.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z kapitoly 3.5. Každá homogenní soustava rovnic má nulové řešení, součet řešení je řešení a skalární násobek řešení je řešení. Množina všech řešení tedy má vlastnosti požadované v definici vektorového podprostoru. Navíc, fundamentální systém řešení má $n - \text{rank } A$ prvků a tvoří bázi prostoru všech řešení. $\square$

Mnoho dalších příkladů můžeme získat jako lineární obaly.

Tvrzení 10.1.2. Buď W podmnožina vektorového prostoru V nad polem P . Pak platí:

(1) $\llbracket W \rrbracket$ je podprostor prostoru V .

(2) Je-li U podprostor V obsahující W , pak $\llbracket W \rrbracket \subseteq U$.

Důkaz. (1) Ukážeme, že množina $\llbracket W \rrbracket$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): Je-li $W = \emptyset$, potom $\llbracket W \rrbracket = \{0\}$, takže $0 \in \llbracket W \rrbracket$. Je-li $W \neq \emptyset$, potom pro libovolný vektor $v \in W$ je $0 = 0v \in \llbracket W \rrbracket$. Podmínka (ii): Jsou-li $u, v \in \llbracket W \rrbracket$, potom $u = x^1 u_1 + \dots + x^m u_m$ a $v = y^1 v_1 + \dots + y^n v_n$ pro nějaké $x^i, y^j \in P$, $u_i, v_j \in W$ a $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy $u + v = x^1 u_1 + \dots + x^m u_m + y^1 v_1 + \dots + y^n v_n \in \llbracket W \rrbracket$. Podmínka (iii): Cvičení.

(2) Buď $w \in \llbracket W \rrbracket$, tedy $w = x^1 w_1 + \dots + x^n w_n$ pro nějaké $x^i \in P$, $w_i \in W$ a $n \in \mathbb{N}$. Jelikož $W \subseteq U$, všechny vektory w_i jsou prvky U , a jelikož U je vektorový podprostor, tedy uzavřený na násobení skalárem a sčítání vektorů, $w \in U$. $\square$

Tudíž, $\llbracket W \rrbracket$ je nejmenší podprostor prostoru V obsahující množinu W .

Tvrzení 10.1.3. *Libovolný podprostor konečněrozměrného vektorového prostoru je konečněrozměrný.*

Důkaz. Buď V konečněrozměrný prostor, $\dim V = n$, buď $U \subseteq V$ podprostor. Zkonstruujeme bázi postupem, který jsme použili při doplňování lineárně nezávislé množiny vektorů do báze v důkazu druhého Důsledku Tvrzení 9.3.3.

0-tý krok: Je-li U nulový prostor, jsme hotovi (U je 0-rozměrný).

1-ní krok: Když $U \neq \{0\}$, pak existuje vektor $u_1 \in U \setminus \{0\}$. Je-li $U = \llbracket u_1 \rrbracket$, pak jsme hotovi (U je 1-rozměrný).

k -tý krok: Když $U \neq \llbracket u_1, \dots, u_{k-1} \rrbracket$, pak existuje vektor $u_k \in U \setminus \llbracket u_1, \dots, u_{k-1} \rrbracket$. Je-li $U = \llbracket u_1, \dots, u_k \rrbracket$, pak jsme hotovi (U je k -rozměrný).

Množina $\{u_1, \dots, u_k\}$ je lineárně nezávislá, protože žádný z jejích vektorů není lineární kombinací předchozích (podle konstrukce $u_i \notin \llbracket u_1, \dots, u_{i-1} \rrbracket$). Podle Tvrzení 9.2.5 lineárně nezávislá množina nemá více prvků než množina generátorů, takže pro nějaké $m \leq n$ dostaneme $U = \llbracket u_1, \dots, u_m \rrbracket$. $\square$

Důsledek. *Vektorový prostor, který má nekonečněrozměrný podprostor, je nekonečněrozměrný.*

Příklad. Prostor $C^r\mathbb{R}$ všech funkcí $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spojitých se všemi derivacemi až do řádu r včetně, je nekonečněrozměrný, protože obsahuje podprostor polynomů $\mathbb{R}[x]$, který je nekonečněrozměrný. $\square$

Tvrzení 10.1.4. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor, buď U jeho podprostor. Jestliže $\dim U = \dim V$, pak $U = V$.*

Důkaz. Buď $(u_1, \dots, u_n)$ libovolná báze U . Předpokládejme, že $U \neq V$, tedy že existuje vektor $v \in V \setminus U$. V prostoru V tak máme $(n+1)$ -prvkovou lineárně nezávislou množinu vektorů $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ (žádný z nich není lineární kombinací předchozích: vektory u_i protože jsou bazové, vektor v proto, že jinak by ležel v U). Tedy $\dim V \geq n+1 > n = \dim U$. $\square$

Příklad. (1) Podprostory $\mathbb{R}$.

(2) Podprostory $\mathbb{R}^2$.

(3) Podprostory $\mathbb{R}^3$. $\square$