

2.2.3. Laplaceův rozvoj

Definice 2.2.3. Buď A matice typu $n \times n$. Determinant řádu $n - 1$ matice vzniklé z A vynecháním jednoho řádku a jednoho sloupku je *minor*. Při vynechání i -tého řádku a j -tého sloupku příslušný minor označujeme

$$\bar{A}_j^i.$$

Kofaktor (nebo *algebraický doplněk*) prvku A_j^i je

$$\hat{A}_j^i = (-1)^{i+j} \bar{A}_j^i.$$

Tedy, kofaktor (algebraický doplněk) prvku A_j^i je $(-1)^{i+j}$ -násobek determinantu matice, která vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupku.

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\bar{A}_1^1 = d, \quad \bar{A}_2^1 = c, \quad \bar{A}_1^2 = b, \quad \bar{A}_2^2 = a,$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_1^1 &= (-1)^{1+1} \bar{A}_1^1 = d, & \hat{A}_2^1 &= (-1)^{1+2} \bar{A}_2^1 = -c, \\ \hat{A}_1^2 &= (-1)^{2+1} \bar{A}_1^2 = -b, & \hat{A}_2^2 &= (-1)^{2+2} \bar{A}_2^2 = a. \end{aligned} \quad \square$$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\bar{A}_1^1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, \quad \bar{A}_2^1 = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, \quad \bar{A}_3^1 = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{A}_3^3 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_1^1 &= (-1)^{1+1} \bar{A}_1^1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, & \hat{A}_2^1 &= (-1)^{1+2} \bar{A}_2^1 = - \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, \\ \hat{A}_3^1 &= (-1)^{1+3} \bar{A}_3^1 = - \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, & \hat{A}_3^3 &= (-1)^{3+3} \bar{A}_3^3 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad \square$$

Tvrzení 2.2.11 (Laplaceova věta o rozvoji determinantu). *Buď A matice typu $n \times n$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\begin{aligned} \det A &= A_1^i \hat{A}_1^i + A_2^i \hat{A}_2^i + \dots + A_n^i \hat{A}_n^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \hat{A}_j^i = \\ &= A_i^1 \hat{A}_i^1 + A_i^2 \hat{A}_i^2 + \dots + A_i^n \hat{A}_i^n = \sum_{j=1}^n A_i^j \hat{A}_i^j. \end{aligned}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & \dots & A_{j-1}^i & A_j^i & A_{j+1}^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = & \quad (\text{Lemma 2.2.2}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_j^i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{j=1}^n A_j^i \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ukažme, že

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \hat{A}_j^i.$$

Vyměňujeme i -tý řádek $(0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ s předchozími řádky tak dlouho, až bude prvním řádkem; k tomu je potřeba $i - 1$ výměn. Poté vyměňujeme j -tý sloupek $(1 \ A_j^1 \dots A_j^{i-1} \ A_j^{i+1} \dots A_j^n)^\top$ s předchozími sloupky tak dlouho, až bude prvním sloupkem; k tomu je potřeba $j - 1$ výměn. Takto vzniklý determinant je tedy nutné vynásobit číslem $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$ a navíc, viz Lemma 2.2.10, se rozpadá na subdeterminanty $\det(1)$ a $\bar{A}_j^i$. Proto $\det A = \sum_{j=1}^n A_j^i \cdot (-1)^{i+j} \bar{A}_j^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \hat{A}_j^i$ a máme rozvoj podle i -tého řádku.

Rozvoj podle i -tého sloupku získáme analogicky. $\square$

Definice 2.2.4. Vztah v Laplaceově větě je *Laplaceův rozvoj podle i -tého řádku* resp. *podle i -tého sloupku*.

Příklad.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \\
 &= 8 + (-2) = 6
 \end{aligned}$$

$\square$

2.3. Adjungovaná matice

Definice 2.3.1. Buď A čtvercová matice. Označme $\hat{A}$ matici kofaktorů $\hat{A}_j^i$. Matice $\hat{A}^\top$ je matice *adjungovaná* k matici A a značí se $\text{adj } A$. Tedy,

$$\text{adj } A = \hat{A}^\top.$$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\text{adj } A = \hat{A}^\top = \begin{pmatrix} \hat{A}_1^1 & \hat{A}_2^1 \\ \hat{A}_1^2 & \hat{A}_2^2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad \square$$

Tvrzení 2.3.1. Pro libovolnou čtvercovou matici A

$$\det A \cdot E = A \cdot \text{adj } A = \text{adj } A \cdot A.$$

Je-li A regulární matice, pak

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A.$$

Důkaz. V i -tém řádku a j -tém sloupku matice $A \cdot \text{adj } A$ je

$$(A \cdot \text{adj } A)_j^i = \sum_k A_k^i (\hat{A}^\top)_j^k = \sum_k A_k^i \hat{A}_k^j.$$

Pro $i = j$ podle Laplaceovy věty

$$(A \cdot \text{adj } A)_i^i = \sum_k A_k^i \hat{A}_k^i = \det A.$$

Je-li $i \neq j$, buď B matice, která z A vznikne tím, že j -tý řádek nahradíme i -tým řádkem. Potom

$$\begin{aligned} (A \cdot \text{adj } A)_j^i &= \sum_k A_k^i \hat{A}_k^j = & (B \text{ se liší od } A \text{ jen v } j\text{-tém řádku}) \\ &= \sum_k B_k^i \hat{A}_k^j = & (B_k^i = A_k^i) \\ &= \sum_k B_k^j \hat{A}_k^j = & (\text{podle Laplaceovy věty}) \\ &= \det B = & (B \text{ má dva stejné řádky}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Matice $A \cdot \text{adj } A$ je tedy diagonální a všechny prvky na diagonále jsou rovny $\det A$, čili

$$A \cdot \text{adj } A = \det A \cdot E.$$

Rovnost $\text{adj } A \cdot A = \det A \cdot E$ dostaneme analogicky.

Je-li A regulární, pak $\det A \neq 0$, takže jím můžeme dělit a s použitím Tvrzení 1.4.3 dostaneme uvedený vztah. $\square$

Příklad. Mějme regulární matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Například pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

dostaneme

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

3. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

3.1. Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení

Definice 3.1.1. Buďte $n \in \mathbb{N}$, P pole, $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in P$, $x^1, x^2, \dots, x^n \notin P$. Potom

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = b$$

je *lineární rovnice nad polem P o n neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$* (nejsou to mocniny, jen horní indexy). Prvky $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in P$ jsou *koefficienty*.

Uvedenou lineární rovnici můžeme zapsat

$$\sum_{j=1}^n a_j x^j = b.$$

Definice 3.1.2. *Řešení rovnice*

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = b$$

je každá uspořádaná n -tice $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ prvků pole P taková, že platí rovnost

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n = b.$$

Při hledání řešení rovnice tedy hledáme prvky $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ pole P takové, že po dosazení ξ^i za x^i pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se z rovnice stane rovnost.

Příklad. Nechť P je pole reálných čísel $\mathbb{R}$.

$$1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 4 \cdot x^4 = 6$$

je lineární rovnice o čtyřech neznámých x^1, x^2, x^3, x^4 . Řešení této rovnice jsou například $(6, 0, 1, 0)$, $(2, 2, 7, 0)$, $(-4, 3, 0, 1)$, ale nejsou to zdaleka všechna řešení. $\square$

Tvrzení 3.1.1. *Buď $ax = b$ lineární rovnice nad polem P o jedné neznámé x .*

- (1) *Pokud $a \neq 0$, potom $ax = b$ má právě jedno řešení, a to $\xi = ba^{-1}$.*
- (2) *Pokud $a = 0$ a $b \neq 0$, potom $ax = b$ nemá řešení.*
- (3) *Pokud $a = b = 0$, potom každý prvek pole P je řešením $ax = b$.*

Důkaz. (1) Dosadíme-li $\xi = ba^{-1}$ za x , dostaneme $a\xi = aba^{-1} = b$, takže ξ je řešení.

Na druhou stranu, je-li ξ nějaké řešení, tedy $a\xi = b$, pak $\xi = \xi \cdot 1 = \xi(aa^{-1}) = (\xi a)a^{-1} = (a\xi)a^{-1} = ba^{-1}$. Čili každé řešení je rovno ba^{-1} a je tedy jediné.

(2) a (3) Vyplývá z toho, že $0 \cdot x = 0$ pro každé $x \in P$, viz kapitola 6. $\square$

Příklad. Rovnice $3x = 6$ nad polem reálných čísel má jediné řešení $6 \cdot 3^{-1} = 2$. $\square$

Definice 3.1.3. Buďte $m, n, i, j \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, P pole, pro každé i, j nechť $a_j^i, b^i \in P$, $x^1, x^2, \dots, x^n \notin P$. Potom

$$a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \dots + a_n^1x^n = b^1$$

$$a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \dots + a_n^2x^n = b^2$$

$\vdots$

$$a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \dots + a_n^mx^n = b^m$$

je *soustava m lineárních rovnic nad polem P o n neznámých $x^1, \dots, x^n$* .

Uvedenou soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat

$$\sum_{j=1}^n a_j^i x^j = b^i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Označíme-li

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu lineárních rovnic psát jako rovnici

$$Ax = b.$$

Definice 3.1.4. Matice $A = (a_j^i)_{m \times n}$ je *matice soustavy*, $b = (b^i)_{m \times 1}$ je *sloupek pravých stran*, $x = (x^i)_{n \times 1}$ je *sloupek neznámých*. Matice

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}$$

je *rozšířená matice soustavy*. $\bar{A}$ se někdy značí $(A | b)$ nebo $(a_j^i | b^i)$.

Definice 3.1.5. *Řešení soustavy*

$$a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = b^1$$

$$a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = b^2$$

$\vdots$

$$a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = b^m$$

m lineárních rovnic nad polem P o n neznámých je každá uspořádaná n -tice $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ prvků pole P taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ platí rovnost

$$a_1^i \xi^1 + a_2^i \xi^2 + \dots + a_n^i \xi^n = b^i,$$

nebo při maticovém zápisu je to sloupková matice $\xi = (\xi^1 \quad \xi^2 \quad \dots \quad \xi^n)^\top$ taková, že platí rovnost

$$A\xi = b.$$

Součin Ax si můžeme rozepsat

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n \end{pmatrix} = \\ &= x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} = \\ &= x^1 A_1^\circ + x^2 A_2^\circ + \dots + x^n A_n^\circ \end{aligned}$$

a soustavu $Ax = b$ pak můžeme přepsat

$$x^1 A_1^\circ + x^2 A_2^\circ + \cdots + x^n A_n^\circ = b.$$

Tedy, soustava lineárních rovnic $Ax = b$ má řešení právě tehdy, když existuje lineární kombinace sloupků matice A , která je rovna sloupku pravých stran b . Koeficienty takových lineárních kombinací tvoří jednotlivá řešení soustavy.

Jestliže soustava lineárních rovnic má nějaké řešení, tj. sloupek pravých stran je nějakou lineární kombinací sloupků matice soustavy, potom hodnota rozšířené matice soustavy je rovna hodnotě matice soustavy. Jestliže soustava nemá řešení, tj. sloupek pravých stran není lineární kombinací sloupků matice soustavy, potom hodnota rozšířené matice soustavy je o 1 větší než hodnota matice soustavy.

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy.

Příklad. (1) Řešení lineární rovnice

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 = b$$

s reálnými koeficienty o dvou neznámých x^1, x^2 jsou uspořádané dvojice (ξ^1, ξ^2) reálných čísel takové, že po jejich dosazení do rovnice za neznámé dostaneme rovnost. Množina všech řešení takové rovnice je tedy

$$\{(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \xi^1 + a_2 \xi^2 = b\}$$

a bereme-li uspořádané dvojice jako body v rovině, tato množina je

- prázdná, tj. rovnice nemá řešení — pokud $a_1 = a_2 = 0$ a $b \neq 0$;
- přímka, tj. rovnice má nekonečně mnoho řešení — pokud aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2 je nenulový;
- celá rovina, tj. rovnice má nekonečně mnoho řešení — pokud $a_1 = a_2 = b = 0$.

Je-li to přímka procházející dvěma body $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ a označíme-li $w = u - v$, můžeme ji zapsat také parametricky

$$\begin{aligned} \{u + tw \mid t \in \mathbb{R}\} &= \{(u_1, u_2) + t(w_1, w_2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(u_1 + tw_1, u_2 + tw_2) \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(2) Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic. Taková množina je tedy

- prázdná — pokud buď aspoň jedna rovnice nemá řešení, nebo množiny všech řešení dvou rovnic jsou rovnoběžné přímky, nebo množiny všech řešení tří rovnic jsou přímky s prázdným průnikem;
- jednoprvková — pokud množiny všech řešení dvou rovnic jsou přímky s jednoprvkovým průnikem, jehož prvek je řešením i všech ostatních rovnic soustavy;
- přímka — pokud to není celá rovina a všechny množiny všech řešení jednotlivých rovnic různé od celé roviny jsou tatáž přímka, tedy všechny rovnice jsou násobky jedné z nich;
- celá rovina — pokud všechny rovnice mají všechny koeficienty i pravé strany nulové, tedy $a_1^i = a_2^i = b^i = 0$ pro každé i .

(3) Řešení lineární rovnice o třech neznámých jsou uspořádané trojice, po jejichž dosazení do rovnice dostaneme rovnost, a bereme-li uspořádané trojice jako body v trojrozměrném prostoru, množina všech řešení je

- prázdná — pokud $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ a $b \neq 0$;
- rovina — pokud aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 je nenulový;
- celý trojrozměrný prostor — pokud $a_1 = a_2 = a_3 = b = 0$.

A také rovinu v prostoru můžeme vyjádřit parametricky.

(4) Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o třech neznámých může být

- prázdná;
 - jednoprvková;
 - přímka;
 - rovina;
 - celý trojrozměrný prostor.
- (5) Řešení lineární rovnice o n neznámých jsou uspořádané n -tice a množina všech řešení je
- prázdná;
 - „ $(n - 1)$ -rozměrná rovina“, nazývá se *nadrovina* v n -rozměrném prostoru;
 - celý n -rozměrný prostor.
- Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o n neznámých je tedy případně průnik nadrovin v n -rozměrném prostoru. $\square$

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned}x^1 + 2x^2 - x^3 &= 1 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 1 \\ 2x^1 - x^2 + x^3 &= 1\end{aligned}$$

má právě jedno řešení, $(0,5, 0,5, 0,5)$, tj. $\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0,5$. Množina všech řešení je $\{(0,5, 0,5, 0,5)\}$.

(2) Mějme soustavu

$$x - y = 1,$$

tedy jednu rovnici o dvou neznámých x, y . Každá uspořádaná dvojice $(t, t - 1)$, kde t je libovolné reálné číslo, je řešení soustavy, tj. $\xi^1 = t, \xi^2 = t - 1$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení a množina všech řešení je $\{(t, t - 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(3) Soustava

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ x &= 1\end{aligned}$$

nemá žádné řešení, množina všech řešení je tedy prázdná množina $\emptyset$. $\square$

3.2. Gaussova eliminační metoda a obecné řešení

Řešit soustavu lineárních rovnic, tj. hledat množinu všech jejích řešení, je možné tak, že soustavu upravíme na takový tvar, ze kterého všechna řešení vyčteme. Je ovšem nutné používat pouze takové úpravy, po jejichž provedení množina všech řešení nové soustavy je stejná jako množina všech řešení původní soustavy.

Definice 3.2.1. *Ekvivalentní úprava* soustavy lineárních rovnic je úprava, jejíž provedením vznikne soustava lineárních rovnic s množinou všech řešení rovnou množině všech řešení původní soustavy.
Soustavy lineárních rovnic, jejichž množiny všech řešení se vzájemně rovnají, jsou *ekvivalentní*.

Definice 3.2.2. *Elementární úpravy* soustavy lineárních rovnic jsou

- (i) přičtení nějakého násobku jedné rovnice k jiné rovnici,
- (ii) vynásobení některé rovnice nenulovým prvkem pole,
- (iii) vzájemná výměna dvou rovnic.

Ke každé elementární úpravě soustavy existuje elementární úprava (stejného typu), která soustavu převede do původního stavu.

Je zřejmé, že provedení řádkové elementární úpravy rozšířené matice soustavy je totéž co provedení obdobné elementární úpravy soustavy.

Podle následujícího tvrzení elementární úpravy jsou ekvivalentní.

Tvrzení 3.2.1. *Elementární úpravy soustavy lineárních rovnic jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Mějme soustavu lineárních rovnic o n neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$ a buď $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ její řešení, tj. pro každé i platí rovnost

$$a_1^i \xi^1 + a_2^i \xi^2 + \dots + a_n^i \xi^n = b^i.$$

Zvolme si jednu elementární úpravu, přičtení c -násobku j -té rovnice k i -té rovnici, kde $i \neq j$ (pro zbylé dvě úpravy je důkaz analogický). Po této úpravě dostaneme novou soustavu, která se od té původní liší jen v i -té rovnici, ta v nové soustavě je

$$(a_1^i + ca_1^j)x^1 + \dots + (a_n^i + ca_n^j)x^n = b^i + cb^j.$$

Je zřejmé, že ξ je řešením i této nové soustavy, protože je řešením nové i -té rovnice

$$\begin{aligned} (a_1^i + ca_1^j)\xi^1 + \dots + (a_n^i + ca_n^j)\xi^n &= \\ &= (a_1^i \xi^1 + \dots + a_n^i \xi^n) + c(a_1^j \xi^1 + \dots + a_n^j \xi^n) = \\ &= b^i + cb^j \end{aligned}$$

i všech ostatních, nezměněných rovnic soustavy. To znamená, že každé řešení původní soustavy je řešením i upravené soustavy.

Při maticovém zápisu můžeme tvrzení dokázat s využitím toho, že řádková elementární úprava matice je totéž co vynásobení elementární maticí zleva. Úpravou soustavy $Ax = b$ dostaneme soustavu $QAx = Qb$. Jestliže ξ je řešením původní soustavy, tedy $A\xi = b$, potom $QA\xi = Qb$ a ξ je řešením i upravené soustavy.

Vzhledem k tomu, že upravenou soustavu můžeme převést na tu původní opět pomocí jedné z elementárních úprav, každé řešení upravené soustavy je také řešením původní soustavy. Celkově tedy množina všech řešení upravené soustavy je rovna množině všech řešení původní soustavy. $\square$

Tvary soustavy lineárních rovnic, ze kterých lze snadno vyčíst všechna řešení soustavy, jsou ty, jejichž rozšířené matice jsou ve schodovitém a ještě lépe v Gaussově–Jordanově tvaru.

Gaussova eliminační metoda. Řádkovými elementárními úpravami upravme rozšířenou matici soustavy na Gaussův–Jordanův tvar (stačil by i schodovitý). Je zřejmé, že počet nenulových řádků příslušné upravené matice soustavy není větší než počet neznámých, čili počet sloupků matice soustavy. Jestliže upravená rozšířená matice soustavy má více (o jeden) nenulových řádků než příslušná matice soustavy, soustava (upravená i původní) nemá řešení. Jestliže počty nenulových řádků upravené rozšířené matice soustavy i příslušné matice soustavy se rovnají r ($r \leq n$), tj. rozšířená matice soustavy a matice soustavy mají stejné hodnoty, příslušná soustava rovnic (uvádíme jen ty nenulové) je

$$\begin{aligned} x^{k_1} + \dots + 0 + \dots + 0 + c_{k_r+1}^1 x^{k_r+1} + \dots + c_n^1 x^n &= d^1 \\ &\vdots \\ x^{k_{r-1}} + \dots + 0 + c_{k_r+1}^{r-1} x^{k_r+1} + \dots + c_n^{r-1} x^n &= d^{r-1} \\ x^{k_r} + c_{k_r+1}^r x^{k_r+1} + \dots + c_n^r x^n &= d^r. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice můžeme pomocí $x^{k_r+1}, \dots, x^n$ vyjádřit

$$x^{k_r} = d^r - c_{k_r+1}^r x^{k_r+1} - \dots - c_n^r x^n.$$

Z předposlední rovnice můžeme pomocí $x^{k_{r-1}+1}, \dots, x^{k_r-1}, x^{k_r+1}, \dots, x^n$ vyjádřit

$$x^{k_{r-1}} = d^{r-1} - c_{k_{r-1}+1}^{r-1} x^{k_{r-1}+1} - \dots - c_{k_r-1}^{r-1} x^{k_r-1} - c_{k_r+1}^{r-1} x^{k_r+1} - \dots - c_n^{r-1} x^n.$$

Takto můžeme postupovat až k první rovnici, ze které vyjádříme x^{k_1} pomocí neznámých $x^{k_1+1}, \dots, x^n$ kromě $x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$.

Získáme tak vyjádření r neznámých $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$ pomocí $n-r$ neznámých x^i s $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$. Když za neznámé x^i , $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$, zvolíme libovolné prvky pole P , které pak dosadíme do získaných vztahů pro neznámé $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$ a tyto hodnoty dopočítáme, dostaneme řešení soustavy $Ax = b$.

Definice 3.2.3. Neznámé $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$ z předchozího odstavce jsou *hlavní* (nebo *bázové* nebo *bázické*), neznámé x^i , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$, jsou *parametry* (nebo *nebázické neznámé* nebo *volné proměnné*) a označujeme je po řadě $t^1, \dots, t^{n-r}$.

Definice 3.2.4. Řešení soustavy lineárních rovnic o n neznámých, jejíž rozšířená matice má hodnotu r , zapsané pomocí $n-r$ parametrů je *obecné řešení*. Řešení získané z obecného řešení libovolnou volbou parametrů je *partikulární řešení*.

Je zřejmé, že každé řešení soustavy lineárních rovnic lze získat z obecného řešení vhodnou volbou parametrů. Takže množina všech řešení získaných z obecného řešení všemi možnými volbami parametrů je rovna množině všech řešení soustavy a obecné řešení reprezentuje všechna řešení soustavy.

Příklad. Mějme soustavu

$$x^1 + 2x^2 + 3x^3 = 1$$

$$2x^1 + 3x^2 + 4x^3 = 1$$

$$3x^1 + 4x^2 + 5x^3 = 1$$

nad polem reálných čísel. Rozšířená matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Její Gaussův–Jordanův tvar je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a hodnota matice soustavy i hodnota rozšířené matice soustavy se rovnají 2. Uvedený Gaussův–Jordanův tvar reprezentuje soustavu

$$x^1 - x^3 = -1$$

$$x^2 + 2x^3 = 1.$$

Z první rovnice můžeme vyjádřit x^1 pomocí x^3

$$x^1 = -1 + x^3$$

a z druhé rovnice můžeme vyjádřit x^2 pomocí x^3

$$x^2 = 1 - 2x^3.$$

Máme tedy 2 (= hodnost matice) neznámé vyjádřeny pomocí jedné (= $3 - 2$) neznámé. Neznámé x^1 a x^2 jsou hlavní, neznámá x^3 je parametr a můžeme za ni dosadit libovolné reálné číslo a hlavní neznámé dopočítat. Označíme-li parametr t , dostaneme, že

$$\xi(t) = (-1 + t, 1 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

je obecné řešení soustavy. Při volbě $t = 0$ získáme partikulární řešení $\xi(0) = (-1, 1, 0)$. Množina všech řešení soustavy je

$$\{(-1 + t, 1 - 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Uspořádanou trojici $(-1 + t, 1 - 2t, t)$ můžeme zapsat

$$\begin{aligned} (-1 + t, 1 - 2t, t) &= (-1, 1, 0) + (t, -2t, t) = \\ &= (-1, 1, 0) + t(1, -2, 1) \end{aligned}$$

a množinu všech řešení soustavy pak můžeme zapsat

$$\{(-1, 1, 0) + t(1, -2, 1) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

což je přímka v $\mathbb{R}^3$ procházející bodem $(-1, 1, 0)$, který je dán sloupcem pravých stran soustavy v Gaussově–Jordanově tvaru, se směrovým vektorem $(1, -2, 1)$. Při maticovém zápisu množina všech řešení je

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}. \quad \square$$

Příklad. Mějme soustavu

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 &= 1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 &= 1 \\ 3x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 6x^4 &= 1 \\ 4x^1 + 5x^2 + 6x^3 + 7x^4 &= 1 \end{aligned}$$

nad polem reálných čísel. Rozšířená matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Její Gaussův–Jordanův tvar je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice soustavy se rovnají 2. Uvedený Gaussův–Jordanův tvar reprezentuje soustavu

$$\begin{aligned} x^1 - x^3 - 2x^4 &= -1 \\ x^2 + 2x^3 + 3x^4 &= 1. \end{aligned}$$

Z první rovnice můžeme vyjádřit x^1 pomocí x^3 a x^4

$$x^1 = -1 + x^3 + 2x^4$$

a z druhé rovnice můžeme vyjádřit x^2 pomocí x^3 a x^4

$$x^2 = 1 - 2x^3 - 3x^4.$$

Máme tedy 2 (= hodnost matice) neznámé vyjádřeny pomocí dvou (= $4 - 2$) neznámých. Neznámé x^1 a x^2 jsou hlavní, neznámé x^3 a x^4 jsou parametry a můžeme za ně dosadit libovolná reálná čísla a hlavní neznámé dopočítat. Označíme-li parametry t^1 a t^2 , dostaneme, že

$$\xi(t^1, t^2) = (-1 + t^1 + 2t^2, 1 - 2t^1 - 3t^2, t^1, t^2), \quad t^1, t^2 \in \mathbb{R},$$

je obecné řešení soustavy. Při volbě $t^1 = 1, t^2 = 0$ získáme partikulární řešení $\xi(1, 0) = (0, -1, 1, 0)$, při volbě $t^1 = 0, t^2 = 1$ získáme partikulární řešení $\xi(0, 1) = (1, -2, 0, 1)$. Množina všech řešení soustavy je

$$\{(-1 + t^1 + 2t^2, 1 - 2t^1 - 3t^2, t^1, t^2) \mid t^1, t^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Uspořádanou čtveřici $(-1 + t^1 + 2t^2, 1 - 2t^1 - 3t^2, t^1, t^2)$ můžeme zapsat

$$\begin{aligned} (-1 + t^1 + 2t^2, 1 - 2t^1 - 3t^2, t^1, t^2) &= \\ &= (-1, 1, 0, 0) + (t^1, -2t^1, t^1, 0) + (2t^2, -3t^2, 0, t^2) = \\ &= (-1, 1, 0, 0) + t^1(1, -2, 1, 0) + t^2(2, -3, 0, 1) \end{aligned}$$

a množinu všech řešení soustavy pak můžeme zapsat

$$\{(-1, 1, 0, 0) + t^1(1, -2, 1, 0) + t^2(2, -3, 0, 1) \mid t^1, t^2 \in \mathbb{R}\},$$

při maticovém zápisu

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t^1, t^2 \in \mathbb{R} \right\}. \quad \square$$

3.3. Frobeniova věta

Z předchozích pozorování a tvrzení vyplývá následující věta.

Tvrzení 3.3.1 (Frobeniova věta). *Soustava lineárních rovnic má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy.*

Důkaz. Jestliže soustava $Ax = b$ má nějaké řešení, pak sloupek b pravých stran je lineární kombinací sloupků matice A a rozšířením matice A o takový sloupek se hodnost nezmění. Takže matice A a $\bar{A}$ mají stejné hodnosti.

Jestliže se hodnosti matic A a $\bar{A}$ rovnají, a rovnají se tedy i hodnosti příslušných matic v Gaussově–Jordanově tvaru, pak použitím Gaussovy eliminační metody a libovolnou volbou parametrů získáme řešení soustavy. $\square$

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 - x^3 &= 1 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 1 \\ 2x^1 - x^2 + x^3 &= 1 \end{aligned}$$

má matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a rozšířenou matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jejich hodnoty jsou stejné, obě se rovnají 3, takže podle Frobeniový věty soustava má řešení. Jelikož hodnoty jsou rovny počtu neznámých, všechny neznámé jsou hlavní, žádná není parametr a soustava má právě jedno řešení.

(2) Soustava

$$x - y = 1$$

má matici soustavy

$$(1 \quad -1)$$

a rozšířenou matici soustavy

$$(1 \quad -1 \quad 1).$$

Jejich hodnoty jsou stejné, obě se rovnají 1, takže podle Frobeniový věty soustava má řešení. Jelikož hodnoty jsou nižší než počet neznámých, jedna neznámá je hlavní, jedna neznámá je parametr a soustava má nekonečně mnoho řešení.

(3) Soustava

$$x = 0$$

$$x = 1$$

má matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a rozšířenou matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnota matice soustavy je rovna 1 a hodnota rozšířené matice soustavy je rovna 2, takže podle Frobeniový věty soustava nemá řešení. $\square$

3.4. Cramerovo pravidlo

Podle Frobeniový věty soustava s regulární maticí má řešení. Podle následující věty má právě jedno řešení.

Tvrzení 3.4.1. *Bud' $Ax = b$ soustava se čtvercovou maticí A . Potom A je regulární právě tehdy, když $Ax = b$ má právě jedno řešení, a to*

$$\xi = A^{-1}b.$$

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Nechť A je regulární matice, tedy invertibilní, s maximální hodnotí. Potom podle Frobeniový věty soustava $Ax = b$ má řešení. A pro každé řešení ξ platí $A\xi = b$, tedy $\xi = A^{-1}A\xi = A^{-1}b$, čili řešení je jediné.

„ $\Leftarrow$ “ Nechť A není regulární matice, tedy je singulární, s hodnotí menší než počet jejích řádků, který se rovná počtu neznámých. Pokud hodnota rozšířené matice soustavy je větší než hodnota matice soustavy, soustava nemá řešení. Pokud hodnota rozšířené matice soustavy je stejná jako hodnota matice soustavy, potom v obecném řešení soustavy vystupuje aspoň jeden parametr, za který lze dosadit libovolný prvek pole. Vzhledem k tomu, že pole obsahuje více než jeden prvek, soustava má více než jedno řešení. $\square$

Tvrzení 3.4.2 (Cramerovo pravidlo). *Bud' $Ax = b$ soustava s regulární maticí A a řešením $\xi = (\xi^1 \ \xi^2 \ \dots \ \xi^n)^T$. Pak pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$*

$$\xi^i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kde A_i je matice vzniklá z matice A výměnou i -tého sloupku za sloupek pravých stran b :

$$A_i = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & & & & & \\ a_1^n & \dots & a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Při rozvoji podle i -tého sloupku dostáváme $\det A_i = \sum_j \hat{A}_i^j b^j$. Dále

$$\xi = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A) \cdot b = \frac{1}{\det A} \hat{A}^T b$$

a tedy

$$\xi^i = \frac{\sum_j (\hat{A}^T)_j^i b^j}{\det A} = \frac{\sum_j \hat{A}_i^j b^j}{\det A} = \frac{\sum_j (\hat{A}_i)^j b^j}{\det A} = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Tvrzení můžeme dokázat také takto: Je-li ξ řešení soustavy $Ax = b$, pak b je lineární kombinací sloupků A_i° s koeficienty $\xi^1, \dots, \xi^n$, tedy

$$b = \xi^1 A_1^\circ + \xi^2 A_2^\circ + \dots + \xi^n A_n^\circ = \sum_j \xi^j A_j^\circ$$

a matice A_i má v i -tém sloupku tuto lineární kombinaci všech sloupků matice A . Potom

$$\begin{aligned} \det A_i &= \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & b & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & \sum_j \xi^j A_j^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\ &= \sum_j \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & \xi^j A_j^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\ &= \sum_j \xi^j \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & A_j^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\ &= \xi^i \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & A_i^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\ &= \xi^i \det A, \end{aligned}$$

z čehož dostaneme požadovaný vztah. □

Příklad. Mějme soustavu

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 - x^3 &= 1 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 1 \\ 2x^1 - x^2 + x^3 &= 1. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a

$$\det A = 14 \qquad \det A_1 = 7 \qquad \det A_2 = 7 \qquad \det A_3 = 7.$$

Proto

$$\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

3.5. Homogenní soustavy lineárních rovnic

Definice 3.5.1. Soustava lineárních rovnic s nulovou pravou stranou je *homogenní*.

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 - x^3 &= 0 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 0 \\ 2x^1 - x^2 + x^3 &= 0 \end{aligned}$$

je homogenní.

(2) Soustava

$$x^1 - x^2 + x^3 = 0$$

je homogenní.

(3) Soustava

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

není homogenní. □

Tvrzení 3.5.1. (1) Každá homogenní soustava má řešení.

(2) Každá homogenní soustava má nulové řešení.

(3) Homogenní soustava se čtvercovou maticí má pouze nulové řešení právě tehdy, když matice soustavy je regulární.

(4) Homogenní soustava se čtvercovou maticí má nenulové řešení právě tehdy, když determinant matice soustavy je roven nule.

(5) Homogenní soustava, ve které je méně rovnic než neznámých, má nenulové řešení.

Důkaz. (1) Existence řešení homogenní soustavy vyplývá z Frobeniovy věty i z následujícího bodu (2).

(2) Vzhledem k tomu, že $0 \cdot p = p \cdot 0 = 0$ pro každé p z příslušného pole, viz kapitola 6, je zřejmé, že homogenní soustava má nulové řešení.

(3) Vyplývá z Tvrzení 3.4.1.

(4) Tvrzení je ekvivalentní předchozímu.

(5) V tomto případě při použití Gaussovy eliminační metody kladný počet neznámých jsou parametry a vhodnou volbou libovolného parametru získáme nenulové řešení. □

Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic má následující vlastnost.

Tvrzení 3.5.2. Lineární kombinace řešení homogenní soustavy je také řešení té soustavy. Speciálně, nulový sloupek je řešení, součet řešení je řešení a c -násobek řešení je řešení.

Důkaz. Necht' $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ jsou řešení soustavy $Ax = 0$. Tedy, $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0, \dots, A\xi_k = 0$. Bud'te $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in P$. Potom

$$A(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \dots + \alpha_k\xi_k) = \alpha_1A\xi_1 + \alpha_2A\xi_2 + \dots + \alpha_kA\xi_k = 0$$

a lineární kombinace řešení je tedy také řešení soustavy. □