

Předchozí tvrzení nám nabízí postup pro výpočet inverzní matice. Podle důkazu totiž $A^{-1} = Q = Q_k \dots Q_2 Q_1 = Q_k \dots Q_2 Q_1 E$, což je matice, která vznikne z jednotkové matice provedením řádkových elementárních úprav odpovídajících násobení elementárními maticemi $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$. To jsou stejné úpravy (resp. matice), které převedly A na E .

Výpočet inverzní matice. K matici A typu $n \times n$ zprava připojíme jednotkovou matici stejného typu a vznikne matice typu $n \times 2n$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m & A_2^m & \dots & A_n^m & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

Řádkovými elementárními úpravami ji převedeme na matici, která v levé části má matici B v Gaussově–Jordanově tvaru. Mohou nastat dvě možnosti.

- (1) $B = E$. Pak A je invertibilní a v pravé části matice vyjde A^{-1} .
- (2) $B \neq E$ (B má nulový řádek). Pak A není invertibilní.

Příklad. Vypočítejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Takže A je invertibilní a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{ověřte}).$$

□

Příklad. Hledejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
(A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Matice A tedy není řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí a není invertibilní. $\square$

Cvičení. Pokud existují, spočítejte inverzní matice k maticím

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}
\end{array} \quad \square$$

1.5. Hodnost matice

1.5.1. Lineární nezávislost

Stejně jako v případě lineární kombinace v Definici 1.2.3 následující definice a tvrzení formulujeme pouze pro řádky matice, ale vše lze obdobně formulovat pro sloupky, uspořádané n -tice a matice.

Definice 1.5.1. Množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je *lineárně nezávislá*, jestliže pro libovolné $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ z rovnosti

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + c_2 A_{\circ}^{i_2} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ} \quad \text{vyplývá} \quad c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0,$$

tj. nulový řádek získáme jedině takovou lineární kombinací daných řádků, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule.

Množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá. Tedy, existují $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ taková, že aspoň jedno z nich je nenulové a přitom

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + c_2 A_{\circ}^{i_2} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ}.$$

Tvrzení 1.5.1. Množina řádků je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

Důkaz. Předpokládejme, že množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je lineárně závislá. Existují tedy koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ takové, že aspoň jeden z nich je nenulový (například c_j) a $c_1 A_{\circ}^{i_1} + \dots + c_j A_{\circ}^{i_j} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ}$. Potom

$$\begin{aligned}
c_j A_{\circ}^{i_j} &= -c_1 A_{\circ}^{i_1} - \dots - c_{j-1} A_{\circ}^{i_{j-1}} - c_{j+1} A_{\circ}^{i_{j+1}} - \dots - c_k A_{\circ}^{i_k}, \\
A_{\circ}^{i_j} &= -\frac{c_1}{c_j} A_{\circ}^{i_1} - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j} A_{\circ}^{i_{j-1}} - \frac{c_{j+1}}{c_j} A_{\circ}^{i_{j+1}} - \dots - \frac{c_k}{c_j} A_{\circ}^{i_k}
\end{aligned}$$

a řádek $A_{\circ}^{i_j}$ je tedy lineární kombinací ostatních řádků.

Předpokládejme, že například řádek $A_{\circ}^{i_j}$ je lineární kombinací ostatních řádků, tedy

$$A_{\circ}^{i_j} = c_1 A_{\circ}^{i_1} + \dots + c_{j-1} A_{\circ}^{i_{j-1}} + c_{j+1} A_{\circ}^{i_{j+1}} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k}.$$

Potom

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + \dots + c_{j-1} A_{\circ}^{i_{j-1}} - A_{\circ}^{i_j} + c_{j+1} A_{\circ}^{i_{j+1}} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ}$$

a zároveň $c_j = -1$. Takže množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je lineárně závislá. $\square$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 & c_1 + 2c_2 & 2c_1 + 3c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

a to je možné jedině v případě, že $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých c_1, c_2, c_3 a získáme jedině, nulové řešení).

Množina řádků matice A je tedy lineárně nezávislá. $\square$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c_2 + 2c_3 & c_1 + 2c_2 + c_3 & 2c_1 + 3c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soustava

$$\begin{aligned} c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 0 \end{aligned}$$

má kromě nulového i nenulové řešení (například $c_1 = 3, c_2 = -2, c_3 = 1$). Množina řádků matice A je tedy lineárně závislá. $\square$

Příklad. (1) Množina řádků jednotkové matice je lineárně nezávislá. Ověřte.

(2) Množina řádků, z nichž aspoň jeden je nulový, je lineárně závislá. Ověřte.

(3) Jednoprvková množina obsahující řádek $A_{\circ}^i$ je lineárně nezávislá, jestliže $c A_{\circ}^i = 0_{\circ}$ plyne $c = 0$. Tedy, jednoprvková množina obsahující jeden řádek je lineárně nezávislá, jestliže ten řádek je nenulový, a je lineárně závislá, jestliže ten řádek je nulový.

(4) Množina obsahující jen řádky $A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}$ je lineárně závislá právě tehdy, když jeden z řádků je násobkem druhého z řádků (existuje $c \in P$ takové, že $A_{\circ}^{i_1} = c A_{\circ}^{i_2}$).

(5) Prázdná množina řádků je lineárně nezávislá. $\square$

1.5.2. Hodnost matice

Definice 1.5.2. *Hodnost matice je maximální počet prvků lineárně nezávislé množiny jejích řádků. Hodnost matice A značíme $\text{rank } A$.*

Mějme matici A typu $m \times n$ s řádky $A_o^1, A_o^2, \dots, A_o^m$. Vezmeme všechny možné množiny těchto řádků, čili prázdnou množinu $\emptyset$, jednoprvkové množiny $\{A_o^1\}, \{A_o^2\}, \dots, \{A_o^m\}$, dvouprvkové množiny $\{A_o^1, A_o^2\}, \dots, \{A_o^{m-1}, A_o^m\}$, ..., až množinu $\{A_o^1, A_o^2, \dots, A_o^m\}$. Z těchto množin vybereme ty, které jsou lineárně nezávislé. U každé z nich si poznamenejme počet prvků a maximální z těchto počtů je hodnost matice A .

Hodnost matice s m řádky je tedy jedno z čísel $0, 1, \dots, m$.

Příklad. (1) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je rovna 3. Ověřte.

(2) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je rovna 2. Ověřte.

(3) Hodnost nulové matice je rovna 0, hodnost nenulové matice je kladná.

(4) Hodnost diagonální matice je rovna počtu jejích nenulových řádků. □

Cvičení. Spočítejte hodnosti matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Tvrzení 1.5.2. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Důkaz. Buď A matice ve schodovitém tvaru, která má m řádků, z nichž p je nenulových. Množina všech nenulových řádků je lineárně nezávislá (cvičení), takže $\text{rank } A \geq p$. Jestliže $m = p$, hodnost větší být nemůže. Jestliže $m > p$, pak každá množina s více než p řádky obsahuje aspoň jeden nulový řádek, a je tedy lineárně závislá, takže i v tomto případě $\text{rank } A = p$. □

Podle následujícího tvrzení je množina řádků lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá množina řádků vzniklá provedením řádkové nebo sloupkové elementární úpravy původní množiny řádků.

Tvrzení 1.5.3. *Budte $A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m$ řádky. Necht $B_{\circ}^1, B_{\circ}^2, \dots, B_{\circ}^m$ jsou řádky, které z řádků $A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m$ vzniknou provedením jedné řádkové nebo sloupkové elementární úpravy. Potom množina řádků $\{A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m\}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina řádků $\{B_{\circ}^1, B_{\circ}^2, \dots, B_{\circ}^m\}$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. (1) Necht došlo k přičtení c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku, kde $i \neq j$. Tedy, $B_{\circ}^i = A_{\circ}^i + cA_{\circ}^j$ a $B_{\circ}^k = A_{\circ}^k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $\{A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m\}$ je lineárně nezávislá. Budte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B_{\circ}^1 + \dots + c_m B_{\circ}^m = 0_{\circ}$. Pak

$$\begin{aligned} 0_{\circ} &= c_1 B_{\circ}^1 + \dots + c_m B_{\circ}^m = \\ &= c_1 A_{\circ}^1 + \dots + c_i (A_{\circ}^i + cA_{\circ}^j) + \dots + c_j A_{\circ}^j + \dots + c_m A_{\circ}^m = \\ &= c_1 A_{\circ}^1 + \dots + c_i A_{\circ}^i + \dots + (c_j + cc_i) A_{\circ}^j + \dots + c_m A_{\circ}^m. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m\}$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $c_1 = \dots = c_i = \dots = cc_i + c_j = \dots = c_m = 0$. Z toho dostaneme, že i $c_j = 0$, a množina $\{B_{\circ}^1, B_{\circ}^2, \dots, B_{\circ}^m\}$ je lineárně nezávislá.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m$ vzniknou z řádků $B_{\circ}^1, B_{\circ}^2, \dots, B_{\circ}^m$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

(2) Necht došlo k přičtení c -násobku j -tého sloupku k i -tému sloupku, kde $i \neq j$. Pak pro každé $k \in \{1, \dots, m\}$ je $B_{\circ}^k = A_{\circ}^k + cA_{\circ}^j$ a $B_{\circ}^l = A_{\circ}^l$ pro $l \neq i$. Tedy $B_{\circ}^k = (A_{\circ}^1 \dots A_{\circ}^i + cA_{\circ}^j \dots A_{\circ}^j \dots A_{\circ}^m)$.

Předpokládejme, že $\{A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m\}$ je lineárně nezávislá. Budte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B_{\circ}^1 + \dots + c_m B_{\circ}^m = 0_{\circ}$. Takže

$$\begin{aligned} c_1 B_{\circ}^1 + \dots + c_m B_{\circ}^m &= \\ &= (\sum_k c_k A_{\circ}^1 \dots \sum_k c_k (A_{\circ}^i + cA_{\circ}^j) \dots \sum_k c_k A_{\circ}^j \dots \sum_k c_k A_{\circ}^m) = \\ &= (\sum_k c_k A_{\circ}^1 \dots \sum_k c_k A_{\circ}^i + c \sum_k c_k A_{\circ}^j \dots \sum_k c_k A_{\circ}^j \dots \sum_k c_k A_{\circ}^m) = \\ &= (0 \dots 0 \dots 0 \dots 0) \end{aligned}$$

a z toho dostaneme

$$\sum_k c_k A_{\circ}^1 = \dots = \sum_k c_k A_{\circ}^i = \dots = \sum_k c_k A_{\circ}^j = \dots = \sum_k c_k A_{\circ}^m = 0.$$

Pak

$$\begin{aligned} (\sum_k c_k A_{\circ}^1 \dots \sum_k c_k A_{\circ}^2 \dots \sum_k c_k A_{\circ}^m) &= \sum_k c_k (A_{\circ}^1 A_{\circ}^2 \dots A_{\circ}^m) = \\ &= \sum_k c_k A_{\circ}^k = c_1 A_{\circ}^1 + \dots + c_m A_{\circ}^m = 0_{\circ} \end{aligned}$$

a z lineární nezávislosti množiny $\{A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m\}$ dostaneme $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$. Množina $\{B_{\circ}^1, B_{\circ}^2, \dots, B_{\circ}^m\}$ je tedy lineárně nezávislá.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A_{\circ}^1, A_{\circ}^2, \dots, A_{\circ}^m$ vzniknou z řádků $B_{\circ}^1, B_{\circ}^2, \dots, B_{\circ}^m$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy je důkaz obdobný a ponecháme ho jako cvičení. $\square$

Důsledek. (1) *Hodnota matice je rovna hodnotě matice z ní vzniklé provedením elementární úpravy.*

(2) *Provedení konečně mnoha elementárních úprav nemění hodnotu.*

(3) *Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zleva nemění hodnotu.*

(4) *Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zprava nemění hodnotu.*

- (5) Ekvivalentní matice mají stejnou hodnotu.
 (6) Hodnota matice je rovna počtu nenulových řádků ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru.
 (7) Hodnota matice je rovna počtu nenulových řádků (sloupků) ekvivalentní matice v Gaussově kanonickém tvaru.
 (8) Maximální počet prvků lineárně nezávislých množin sloupků matice je roven maximálnímu počtu prvků lineárně nezávislých množin jejích řádků, tj. hodnotě matice.
 (9) $\text{rank } A = \text{rank } A^T$.

Příklad. Spočítejme hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takže $\text{rank } A = 3$. □

Příklad. Spočítejme hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takže $\text{rank } A = 2$. □

Definice 1.5.3. Čtvercová matice je *regulární*, jestliže její hodnota je rovna počtu jejích řádků (tedy množina všech jejích řádků je lineárně nezávislá). Čtvercová matice je *singulární*, jestliže není regulární.

- Příklad.** (1) Všechny jednotkové matice jsou regulární.
 (2) Všechny elementární matice jsou regulární.
 (3) Všechny čtvercové matice s aspoň jedním nulovým řádkem jsou singulární. □

Tvrzení 1.5.4. Matice je regulární právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. (1) Matice je invertibilní právě tehdy, když je regulární.

- (2) Regulární matice je součinem konečně mnoha elementárních matic.
 (3) Součin regulárních matic je regulární matice.
 (4) Vynásobení regulární maticí zleva nemění hodnotu.
 (5) Vynásobení regulární maticí zprava nemění hodnotu.

Tvrzení 1.5.5. *Budťe A, B čtvercové matice stejného typu. Obě matice A, B jsou regulární právě tehdy, když matice AB je regulární.*

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Tato implikace je součástí předchozího Důsledku.

„ $\Leftarrow$ “ Dokážeme, že je-li aspoň jedna z matic A, B singulární, pak AB je singulární. Nechť A je singulární. Ekvivalentní matice $S = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou elementární matice, ve schodovitém tvaru, má nulový řádek. Potom matice SB má také nulový řádek, je tedy singulární a řádkově ekvivalentní matice $AB = Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} SB$, která má stejnou hodnotu, je také singulární.

Pro B singulární je důkaz analogický a ponecháme ho jako cvičení. $\square$

Tvrzení 1.5.6. *Budťe A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$. Potom $\text{rank } AB \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$.*

Důkaz. Matici A převedeme pomocí řádkových elementárních úprav na schodovitý tvar $S_A = Q_k \cdots Q_1 A$ a matici B převedeme pomocí sloupkových elementárních úprav na tvar $S_B = B P_1 \cdots P_l$ takový, že S_B^T je ve schodovitém tvaru.

Potom $\text{rank } AB = \text{rank } Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} S_A S_B P_l^{-1} \cdots P_1^{-1} = \text{rank } S_A S_B$, přičemž matice $S_A S_B$ má minimálně tolik nulových řádků, kolik jich má matice S_A , a minimálně tolik nulových sloupků, kolik jich má matice S_B . Tedy $\text{rank } S_A S_B \leq \text{rank } S_A = \text{rank } A$ a $\text{rank } S_A S_B \leq \text{rank } S_B = \text{rank } B$. $\square$

Cvičení. Co se dá říct o $\text{rank}(A + B)$? $\square$

2. DETERMINANT

2.1. Permutace

Definice 2.1.1. Buď M konečná množina. *Permutace* na množině M je bijekce $M \rightarrow M$.

Buď σ permutace na množině M a $m \in M$. Obraz $\sigma(m)$ prvku m při permutaci σ se často značí σ_m .

Definice 2.1.2. *Transpozice* je permutace, při níž se vzájemně vymění dva prvky a ostatní se nezmění.

Tvrzení 2.1.1. Každá permutace je složením konečně mnoha transpozic.

Nechť $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Množinu všech permutací na množině I_n značíme S_n . Permutaci $\sigma \in S_n$ můžeme zapisovat jako uspořádanou n -tici obrazů prvků množiny I_n , tedy $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Definice 2.1.3. Buď $\sigma \in S_n$. Nechť $i, j \in I_n$ jsou takové, že $i < j$ a $\sigma_i > \sigma_j$. Pak dvojice (σ_i, σ_j) tvoří *inverzi* permutace σ .

Počet inverzí permutace σ značíme $\text{inv } \sigma$. Je zřejmé, že $\text{inv } \sigma = \text{inv } \sigma^{-1}$.

Definice 2.1.4. *Signum (znaménko)* permutace $\sigma \in S_n$ je $\text{sgn } \sigma = (-1)^{\text{inv } \sigma}$. Permutace s $\text{sgn } \sigma = 1$ je *sudá*, permutace s $\text{sgn } \sigma = -1$ je *lichá*.

Jelikož $\text{inv } \sigma = \text{inv } \sigma^{-1}$, $\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}$.

Tvrzení 2.1.2. Budte $\rho, \sigma \in S_n$. Pak $\text{sgn}(\pi \circ \rho) = \text{sgn } \pi \cdot \text{sgn } \rho$.

Cvičení. Ukažte, že každá transpozice je lichá permutace. □

Více o permutacích lze najít například v [Marvan, 4. Permutace].

2.2. Determinant

2.2.1. Definice a determinanty některých typů matic

Definice 2.2.1. Buď A matice typu $n \times n$ nad polem P . *Determinant* matice A je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n \in P.$$

Číslo n je *řád* determinantu.

Pro determinant matice A se používá značení

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Díky tomu, že σ je permutace (bijektivní zobrazení) na množině I_n , můžeme ji chápat jako zobrazení z množiny všech řádkových indexů do množiny všech sloupkových indexů

matice A . Ke každému řádku je tedy vzájemně jednoznačně přiřazen sloupek a v každém součinu $A_{\sigma_1}^1 \cdot A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n$ je tedy právě jeden prvek z každého řádku a právě jeden prvek z každého sloupku. Determinant matice A je tedy součet všech takovýchto součinů (pro všechny permutace σ na množině I_n) opatřených buď znaménkem $+$, jde-li o sudou permutaci, nebo znaménkem $-$, jde-li o lichou permutaci.

Příklad. (1) Nechť $n = 1$. Tedy, $I_1 = \{1\}$, $S_1 = \{\text{id}: \{1\} \rightarrow \{1\}\}$ a $\text{sgn id} = 1$. Pro matici $A = (a)$ je $\det A = \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 = 1 \cdot A_1^1 = a$.

(2) Nechť $n = 2$. Tedy, $I_2 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{\text{id}, \tau\}$, kde $\text{id} = (1, 2)$ a $\tau = (2, 1)$ (viz zápis permutace na I_n), $\text{sgn id} = 1$ a $\text{sgn } \tau = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je $\det A = \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 A_{\text{id}_2}^2 + \text{sgn } \tau \cdot A_{\tau_1}^1 A_{\tau_2}^2 = 1 \cdot A_1^1 A_2^2 + (-1) \cdot A_2^1 A_1^2 = ad - bc$. Vzorec pro výpočet determinantu matice druhého řádu je možno odvodit z následujícího obrázku:

$$\begin{array}{c} \oplus \quad \ominus \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{vmatrix} \end{array} = A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2$$

(3) Nechť $n = 3$. Tedy, $I_3 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{\text{id}, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, kde $\text{id} = (1, 2, 3)$, $\sigma_1 = (2, 3, 1)$, $\sigma_2 = (3, 1, 2)$, $\tau_1 = (1, 3, 2)$, $\tau_2 = (3, 2, 1)$, $\tau_3 = (2, 1, 3)$ (viz zápis permutace na I_n), $\text{sgn id} = \text{sgn } \sigma_1 = \text{sgn } \sigma_2 = 1$ a $\text{sgn } \tau_1 = \text{sgn } \tau_2 = \text{sgn } \tau_3 = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

je

$$\begin{aligned} \det A &= \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 A_{\text{id}_2}^2 A_{\text{id}_3}^3 + \text{sgn } \sigma_1 \cdot A_{\sigma_1(1)}^1 A_{\sigma_1(2)}^2 A_{\sigma_1(3)}^3 + \\ &\quad + \text{sgn } \sigma_2 \cdot A_{\sigma_2(1)}^1 A_{\sigma_2(2)}^2 A_{\sigma_2(3)}^3 + \text{sgn } \tau_1 \cdot A_{\tau_1(1)}^1 A_{\tau_1(2)}^2 A_{\tau_1(3)}^3 + \\ &\quad + \text{sgn } \tau_2 \cdot A_{\tau_2(1)}^1 A_{\tau_2(2)}^2 A_{\tau_2(3)}^3 + \text{sgn } \tau_3 \cdot A_{\tau_3(1)}^1 A_{\tau_3(2)}^2 A_{\tau_3(3)}^3 = \\ &= 1 \cdot A_1^1 A_2^2 A_3^3 + 1 \cdot A_2^1 A_3^2 A_1^3 + 1 \cdot A_3^1 A_1^2 A_2^3 + \\ &\quad + (-1) \cdot A_1^1 A_3^2 A_2^3 + (-1) \cdot A_3^1 A_2^2 A_1^3 + (-1) \cdot A_2^1 A_1^2 A_3^3 = \\ &= aei + bfg + cdh - afh - ceg - bdi. \end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet determinantu matice třetího řádu lze odvodit z následujícího obrázku pomocí *Sarrusova pravidla* (pro matice vyššího řádu žádné takové pravidlo neexistuje):

$$= A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_2^1 A_3^2 A_1^3 + A_3^1 A_1^2 A_2^3 - A_1^1 A_3^2 A_2^3 - A_3^1 A_2^2 A_1^3 - A_2^1 A_1^2 A_3^3$$

(4) Nechť $n = 4$. Na čtyřprvkové množině existují 24 permutace, takže při výpočtu determinantu podle definice dostaneme 24 sčítance. Uvedeme si i jiné způsoby výpočtu determinantu. $\square$

Cvičení. Spočítejte determinanty matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \square$$

Tvrzení 2.2.1. *Determinant matice s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem je roven nule.*

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$ s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem. Pro každé $\sigma \in S_n$ je v součinu $A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n$ právě jeden prvek z každého, tedy i nulového řádku a právě jeden prvek z každého, tedy i nulového sloupku. Proto každý takový součin je roven nule. $\square$

Lemma 2.2.2. *Pro matice lišící se pouze v jednom řádku platí*

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^{i-1} & \cdots & A_n^{i-1} \\ A_1^i & \cdots & A_n^i \\ A_1^{i+1} & \cdots & A_n^{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^{i-1} & \cdots & A_n^{i-1} \\ B_1^i & \cdots & B_n^i \\ A_1^{i+1} & \cdots & A_n^{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^{i-1} & \cdots & A_n^{i-1} \\ A_1^i + B_1^i & \cdots & A_n^i + B_n^i \\ A_1^{i+1} & \cdots & A_n^{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Cvičení. $\square$

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 + (-6) + 3 = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}. \quad \square$$

Definice 2.2.2. Čtvercová matice je (*horní* resp. *dolní*) *trojúhelníková* (nebo v (*horním* resp. *dolním*) *trojúhelníkovém tvaru*), jestliže pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A_j^i = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$.

Každá čtvercová matice ve schodovitém tvaru je také v (horním) trojúhelníkovém tvaru a tedy každou čtvercovou matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na trojúhelníkový tvar.

Tvrzení 2.2.3. *Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.*

Důkaz. Buď A horní trojúhelníková matice typu $n \times n$. Buď σ permutace na množině I_n . Jestliže pro nějaké $i \in I_n$ platí $\sigma_i < i$, pak $A_{\sigma_i}^i$ je pod diagonálou, tedy $A_{\sigma_i}^i = 0$ a také $\text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \cdots A_{\sigma_i}^i \cdots A_{\sigma_n}^n = 0$. Jediná permutace σ taková, že $\sigma_i \geq i$ pro každé i , je identita. Jelikož $\text{sgn id} = 1$, $\det A = A_1^1 A_2^2 \cdots A_n^n$.

Pro dolní trojúhelníkové matice je důkaz analogický. $\square$

Důsledek. (1) *Determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na diagonále.*

(2) *Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na diagonále.*

(3) *Determinant jednotkové matice je roven 1.*

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24. \quad \square$$

Determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Příklad. (1) $E^{i,j}(c)$ je trojúhelníková matice a na diagonále má jen jedničky, proto

$$\det E^{i,j}(c) = 1.$$

(2) $E^i(c)$ je diagonální matice a na diagonále má jedno c a jinak jen jedničky, proto

$$\det E^i(c) = c.$$

(3) Jelikož v každém řádku a v každém sloupku matice $E^{i,j}$ je právě jedna jednička a ostatní prvky jsou nuly, existuje jediná permutace τ na I_n , pro kterou jsou všechny $(E^{i,j})_{\tau_1}^1, \dots, (E^{i,j})_{\tau_n}^n$ rovny jedné. Pro ostatní permutace je aspoň jeden z těchto prvků nulový. Díky tvaru $E^{i,j}$ je τ transpozice, takže $\operatorname{sgn} \tau = -1$. Proto

$$\det E^{i,j} = (-1) \cdot (E^{i,j})_{\tau_1}^1 \cdots (E^{i,j})_{\tau_n}^n = -1. \quad \square$$

Tvrzení 2.2.4. Pro každou čtvercovou matici A platí $\det A^T = \det A$.

Důkaz. Činitele v součinu $A_1^{\sigma_1} \cdots A_i^{\sigma_i} \cdots A_n^{\sigma_n}$ můžeme uspořádat podle vzrůstajícího řádkového indexu $A_{\sigma_1^{-1}}^1 \cdots A_{\sigma_i^{-1}}^i \cdots A_{\sigma_n^{-1}}^n$, protože σ_i^{-1} -tý činitel v původním součinu je $A_{\sigma_i^{-1}}^{\sigma_{\sigma_i^{-1}}}$. Potom

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot (A^T)_{\sigma_1}^1 \cdots (A^T)_{\sigma_i}^i \cdots (A^T)_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_1^{\sigma_1} \cdots A_i^{\sigma_i} \cdots A_n^{\sigma_n} = & (\text{přeuspořádání}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1^{-1}}^1 \cdots A_{\sigma_i^{-1}}^i \cdots A_{\sigma_n^{-1}}^n = & (\operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \cdot A_{\sigma_1^{-1}}^1 \cdots A_{\sigma_i^{-1}}^i \cdots A_{\sigma_n^{-1}}^n = \\ &= \det A, \end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n , tak σ^{-1} také. $\square$

Tvrzení 2.2.5. Determinant matice, která má buď dva řádky stejné nebo dva sloupky stejné, je roven nule.

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$, která má i -tý řádek stejný jako j -tý ($i \neq j$), tedy $A_k^i = A_k^j$ pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Buď $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j , čili $\operatorname{sgn} \tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\operatorname{sgn} \sigma' = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau_{ij} = -\operatorname{sgn} \sigma$ a člen determinantu odpovídající permutaci σ' je

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot A_{\sigma'_1}^1 \cdots A_{\sigma'_i}^i \cdots A_{\sigma'_j}^j \cdots A_{\sigma'_n}^n &= \\ &= -\operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \cdots A_{\sigma_j}^i \cdots A_{\sigma_i}^j \cdots A_{\sigma_n}^n = & (A_{\sigma_j}^i = A_{\sigma_j}^j \text{ a } A_{\sigma_i}^j = A_{\sigma_i}^i) \\ &= -\operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \cdots A_{\sigma_i}^i \cdots A_{\sigma_j}^j \cdots A_{\sigma_n}^n, \end{aligned}$$

a je tedy opačný k členu odpovídajícímu permutaci σ .

Množinu S_n , jež má sudý počet prvků, můžeme rozložit na podmnožiny $\{\sigma, \sigma'\}$, které jsou dvouprvkové, protože $\sigma' \neq \sigma$ a $\sigma'' = \sigma$ (ověřte), a každá z nich přispívá k determinantu nulou. Takže $\det A = 0$.

Když má matice dva stejné sloupky, lze tvrzení dokázat analogicky nebo je možno použít předchozí tvrzení. $\square$

2.2.2. Elementární úpravy

Tvrzení 2.2.6. (1) *Přičtením násobku jednoho řádku, resp. sloupku k jinému řádku, resp. sloupku se determinant nezmění, čili*

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i + cA_1^j & A_2^i + cA_2^j & \dots & A_n^i + cA_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix},$$

při zápisu s použitím elementárních matic

$$\det(E^{i,j}(c) \cdot A) = \det(A \cdot E^{i,j}(c)) = \det A.$$

(2) *Vynásobením jednoho řádku, nebo sloupku prvkem c se determinant vynásobí prvkem c , čili*

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cA_1^i & cA_2^i & \dots & cA_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix},$$

při zápisu s použitím elementárních matic

$$\det(E^i(c) \cdot A) = \det(A \cdot E^i(c)) = c \det A.$$

(3) *Vzájemnou výměnou dvou řádků, nebo dvou sloupků determinant změní znaménko, čili*

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix},$$

při zápisu s použitím elementárních matic

$$\det(E^{i,j} \cdot A) = \det(A \cdot E^{i,j}) = -\det A.$$

Důkaz. Uvedeme pouze důkaz pro řádkové úpravy, pro sloupkové je analogický.

Buďte A čtvercová matice a B upravená matice.

(1) Necht B vznikne z A přičtením c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku, čili $B_{\circ}^i = A_{\circ}^i + cA_{\circ}^j$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A . Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_j}^j \dots B_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots (A_{\sigma_i}^i + cA_{\sigma_i}^j) \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n + \\ &\quad + c \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n}_{\text{determinant matice, kde } i\text{-tý řádek je stejný jako } j\text{-tý}} = \\ &= \det A + c \cdot 0 = \det A. \end{aligned}$$

(2) Necht B vznikne z A vynásobením i -tého řádku prvkem c , čili $B_{\circ}^i = cA_{\circ}^i$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A . Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots cA_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= c \det A. \end{aligned}$$

(3) Necht B vznikne z A vzájemnou výměnou i -tého řádku a j -tého řádku, čili $B_{\circ}^i = A_{\circ}^j$, $B_{\circ}^j = A_{\circ}^i$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A . Buď $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j , čili $\operatorname{sgn} \tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\sigma'_i = \sigma_j$, $\sigma'_j = \sigma_i$ a $\sigma'_k = \sigma_k$ pro $k \neq i, j$ a $\operatorname{sgn} \sigma' = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau_{ij} = -\operatorname{sgn} \sigma$. Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_j}^j \dots B_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_j}^i \dots A_{\sigma_n}^n = & (\text{komutativita součinu}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_j}^i \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma'_1}^1 \dots A_{\sigma'_i}^i \dots A_{\sigma'_j}^j \dots A_{\sigma'_n}^n = & (\operatorname{sgn} \sigma' = -\operatorname{sgn} \sigma) \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot A_{\sigma'_1}^1 \dots A_{\sigma'_i}^i \dots A_{\sigma'_j}^j \dots A_{\sigma'_n}^n = \\ &= -\det A, \end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n , tak σ' také. □

Cvičení. Jaký je vztah mezi $\det(cA)$ a $\det A$? □

Cvičení. Necht A je matice typu $n \times n$ taková, že $A^T = -A$ (taková matice se nazývá *antisymetrická*). Ukažte, že je-li n liché číslo, pak $\det A = 0$. □

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} \\
 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \square$$

Důsledek. *Bud' Q elementární matice a A matice stejného typu. Pak*

$$\det QA = \det Q \cdot \det A.$$

Důkaz. (1) $\det(E^{i,j}(c)A) = \det A = 1 \cdot \det A = \det E^{i,j}(c) \cdot \det A$.

(2) $\det(E^i(c)A) = c \det A = \det E^i(c) \cdot \det A$.

(3) $\det(E^{i,j}A) = (-1) \cdot \det A = \det E^{i,j} \cdot \det A$. $\square$

Cvičení. Dokažte, že $\det E^{i,j} = -1$ s využitím předchozího důsledku a toho, že vzájemná výměna dvou řádků je složením konečně mnoha řádkových elementárních úprav ostatních druhů. $\square$

Tvrzení 2.2.7. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant.*

Důkaz. Buď A regulární matice. Podle Důsledku Tvrzení 1.5.4 $A = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$, kde $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ jsou elementární matice. Potom díky Důledku Tvrzení 2.2.6

$$\begin{aligned} \det A &= \det(Q_1 Q_2 \cdots Q_k) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k) = \cdots = \\ &= \det Q_1 \cdot \det Q_2 \cdots \det Q_k. \end{aligned}$$

A součin nenulových determinantů elementárních matic není roven nule, viz kapitola 6.

Nechť $\det A \neq 0$. Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme A na schodovitý tvar B , tedy $B = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou příslušné elementární matice. Potom opět díky Důledku Tvrzení 2.2.6 a díky tomu, že součin nenulových prvků pole je nenulový,

$$\begin{aligned} \det B &= \det(Q_k \cdots Q_1 A) = \det Q_k \det(Q_{k-1} \cdots Q_1 A) = \cdots = \\ &= \det Q_k \det Q_{k-1} \cdots \det Q_1 \det A \neq 0. \end{aligned}$$

Jelikož B je ve schodovitém tvaru a její determinant je tedy součinem prvků na diagonále, na diagonále není žádná nula, opět viz kapitola 6. To znamená, že B nemá nulový řádek, je tedy regulární a A také. $\square$

Důsledek. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant, a to má právě tehdy, když je invertibilní, a to je právě tehdy, když je ekvivalentní jednotkové matici.*

Tvrzení 2.2.8 (Cauchyho věta). *Bud' A, B čtvercové matice stejného typu. Pak*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Důkaz. (1) Je-li A regulární, tedy součin $Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ elementárních matic, pak

$$\begin{aligned} \det AB &= \det(Q_1 \cdots Q_k B) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k B) = \cdots = \\ &= \det Q_1 \det Q_2 \cdots \det Q_k \det B = \det(Q_1 Q_2 \cdots Q_k) \det B = \\ &= \det A \det B. \end{aligned}$$

(2) Je-li A singulární, podle Tvzení 1.5.5 je AB také singulární a tedy

$$\det AB = 0 = \det A = \det A \cdot \det B. \quad \square$$

Cvičení. Pro regulární matici A platí $\det A^{-1} = 1/\det A$. $\square$

Lemma 2.2.9. Každá čtvercová matice je ekvivalentní matici v trojúhelníkovém tvaru, jejíž determinant je roven determinantu původní matice.

Důkaz. Na převedení matice na trojúhelníkový tvar stačí pouze dva typy elementárních úprav, přičtení násobku jednoho řádku, nebo sloupku k jinému řádku, resp. sloupku, což nemění determinant, a vzájemná výměna dvou řádků, nebo dvou sloupků, čímž se změní jen znaménko determinantu.

Pokud při takovém převedení matice na trojúhelníkový tvar použijeme sudý počet výměn řádků, nebo sloupků, determinant získané matice v trojúhelníkovém tvaru je roven determinantu původní matice. Pokud použijeme lichý počet takových výměn, vynásobíme jeden řádek získané matice prvkem -1 a determinant této nové matice v trojúhelníkovém tvaru je roven determinantu původní matice. $\square$

Lemma 2.2.10.

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_k^1 & A_{k+1}^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^k & \cdots & A_k^k & A_{k+1}^k & \cdots & A_n^k \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k+1}^{k+1} & \cdots & A_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k+1}^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^k & \cdots & A_k^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{k+1}^{k+1} & \cdots & A_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k+1}^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Determinant matice A v předchozím tvrzení se rozpadá na *subdeterminanty*: jeden subdeterminant řádu k a jeden subdeterminant řádu $n - k$. Stručně ale výstižně lze toto tvrzení vyjádřit zápisem

$$\begin{vmatrix} A' & X \\ 0 & A'' \end{vmatrix} = |A'| \cdot |A''|.$$

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 8 = 2 \cdot 1 \cdot 8 = 16$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot (-2) = 6 \quad \square$$