

2. přednáška, 10. 10. 2024

Tvrzení 1.2.2. (1) Je-li i -tý řádek matice A nulový, pak i -tý řádek matice AB je nulový.

(2) Je-li j -tý sloupek matice B nulový, pak j -tý sloupek matice AB je nulový.

(3) Součin diagonálních matic je diagonální matice.

(4) Součin blokově diagonálních matic s bloky stejných typů je blokově diagonální matice s bloky stejných typů.

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodu (4), ostatní ponecháme jako cvičení.

(4) Buďte A, B blokově diagonální matice s bloky $A_1, \dots, A_p$, resp. $B_1, \dots, B_p$ takovými, že pro každé i A_i, B_i jsou stejného typu. A, B jsou tedy čtvercové matice stejného typu a je možné je vzájemně násobit.

i -tý řádek matice A je

$$A_{i_0}^i = (0 \quad \dots \quad 0 \quad A_{i_1}^i \quad \dots \quad A_{i_m}^i \quad 0 \quad \dots \quad 0),$$

čili $A_j^i = 0$ pro $j < i_1$ a $j > i_m$.

j -tý sloupek matice B je

$$B_j^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_j^{j_1} \\ \vdots \\ B_j^{j_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

čili $B_j^i = 0$ pro $i < j_1$ a $i > j_n$.

Jsou-li i, j taková, že pozice v i -tém řádku a j -tém sloupku je mimo bloky $A_1, \dots, A_p$, resp. $B_1, \dots, B_p$, pak buď $i_1 > j_n$ nebo $i_m < j_1$. V obou případech pro každé k buď $A_k^i = 0$ nebo $B_j^k = 0$. Jelikož $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ pro každé x z příslušného pole, viz kapitola 6, v obou případech pro každé k platí $A_k^i B_j^k = 0$, tedy i

$$(AB)_j^i = \sum_k A_k^i B_j^k = 0,$$

takže AB je blokově diagonální matice s bloky stejných typů, jakých jsou bloky v maticích A a B . □

Tvrzení 1.2.3. Necht A, B, C jsou matice nad polem P takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a $c \in P$. Pak platí

$$(1) A(BC) = (AB)C,$$

$$(2) AE = EA = A,$$

$$(3) A(B + C) = AB + AC,$$

$$(4) (A + B)C = AC + BC,$$

$$(5) c(AB) = (cA)B = A(cB).$$

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodů (1) a (3), ostatní ponecháme jako cvičení.

(1) Předpokládejme, že A je matice typu $m \times n$, B je matice typu $n \times p$ a C je matice typu $p \times q$. Potom AB je matice typu $m \times p$ a BC je matice typu $n \times q$, takže $A(BC)$ a $(AB)C$ jsou matice typu $m \times q$.

$$\begin{aligned}
(A(BC))_j^i &= && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i (BC)_j^k = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i \sum_{l=1}^p (B_l^k C_j^l) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p A_k^i (B_l^k C_j^l) = && \text{(díky asociativitě součinu v poli)} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (A_k^i B_l^k) C_j^l = && \text{(díky komutativitě součtu v poli)} \\
&= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (A_k^i B_l^k) C_j^l = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{l=1}^p (AB)_l^i C_j^l = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= ((AB)C)_j^i.
\end{aligned}$$

(3) Předpokládejme, že A je matice typu $m \times n$ a B, C jsou matice typu $n \times p$. Potom $A(B + C)$ a $AB + AC$ jsou matice typu $m \times p$ a pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ platí

$$\begin{aligned}
(A(B + C))_j^i &= && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i (B + C)_j^k = && \text{(podle definice součtu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i (B_j^k + C_j^k) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\
&= \sum_{k=1}^n (A_k^i B_j^k + A_k^i C_j^k) = && \text{(díky komutativitě sčítání v poli)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i B_j^k + \sum_{k=1}^n A_k^i C_j^k = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= (AB)_j^i + (AC)_j^i = && \text{(podle definice součtu matic)} \\
&= (AB + AC)_j^i.
\end{aligned}$$

□

1.2.3. Transponování

Definice 1.2.5. *Transponovaná* matice k matici A typu $m \times n$ je matice A^T typu $n \times m$, kde $(A^T)_j^i = A_i^j$ pro všechna i, j .

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

□

Tvrzení 1.2.4. *Nechť A, B jsou matice nad polem P takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a $c \in P$. Pak platí*

$$\begin{aligned} (1) \quad A &= (A^T)^T, & (3) \quad (cA)^T &= cA^T, \\ (2) \quad (A+B)^T &= A^T + B^T, & (4) \quad (AB)^T &= B^T A^T. \end{aligned}$$

Důkaz. (1) Je-li A typu $m \times n$, potom A^T je typu $n \times m$ a $(A^T)^T$ je typu $m \times n$. Navíc pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$((A^T)^T)_j^i = (A^T)_i^j = A_j^i.$$

(4) Budťe A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$. Pak A^T je typu $n \times m$, B^T je typu $p \times n$, AB je typu $m \times p$ a tedy $(AB)^T$ i $B^T A^T$ jsou typu $p \times m$. Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí

$$\begin{aligned} ((AB)^T)_j^i &= (AB)_i^j = \sum_{k=1}^n A_k^j B_i^k = \sum_{k=1}^n B_i^k A_k^j = \sum_{k=1}^n (B^T)_k^i (A^T)_j^k = \\ &= (B^T A^T)_j^i. \end{aligned}$$

Ostatní body jsou ponechány jako cvičení. □

Cvičení. Ukažte, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a libovolné matice $A_1, \dots, A_k$ vhodných typů platí $(A_1 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_1^T$. □

1.3. Elementární úpravy a speciální tvary matic

1.3.1. Elementární úpravy

Definice 1.3.1. Mějme matici nad polem P . *Řádkové elementární úpravy* matice jsou

- (1) přičtení c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku, kde $c \in P$ a $i \neq j$,
- (2) vynásobení i -tého řádku nenulovým prvkem $c \in P$,
- (3) vzájemná výměna i -tého řádku a j -tého řádku.

Sloupkové elementární úpravy matice definujeme analogicky.

Cvičení. Proveďte vzájemnou výměnu dvou řádků pomocí konečně mnoha úprav typů (1) a (2). □

Mějme matici A . Přičtením c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku změníme i -tý řádek na $(A_1^i + cA_1^j \quad A_2^i + cA_2^j \quad \dots \quad A_n^i + cA_n^j)$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Po vynásobení i -tého řádku prvkem $c \in P$ i -tý řádek bude $(cA_1^i \quad cA_2^i \quad \dots \quad cA_n^i)$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Po vzájemné výměně i -tého řádku a j -tého řádku i -tý řádek bude $(A_1^j \quad A_2^j \quad \dots \quad A_n^j)$, j -tý řádek bude $(A_1^i \quad A_2^i \quad \dots \quad A_n^i)$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Sloupkové úpravy fungují analogicky pro sloupky.

Příklad. (1) Přičtením 3-násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního sloupku a třetího sloupku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Ke všem elementárním úpravám existují úpravy inverzní, které jsou také elementární a upravenou matici převedou zpět na původní matici. Inverzní úpravy k řádkovým úpravám jsou

- (1) přičtení $-c$ -násobku j -tého řádku k i -tému řádku,
- (2) vynásobení i -tého řádku prvkem c^{-1} ,
- (3) vzájemná výměna i -tého řádku a j -tého řádku.

Inverzní úpravy ke sloupkovým úpravám jsou obdobné.

Příklad. (1) Přičtením -3 -násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \text{ na matici } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního sloupku a třetího sloupku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} \text{ na matici } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Definice 1.3.2. Matice A, B jsou *ekvivalentní*, jestliže B může vzniknout z A konečnou posloupností elementárních úprav. Je-li možné toho dosáhnout pomocí pouze řádkových, resp. sloupkových úprav, matice jsou *řádkově*, resp. *sloupkově ekvivalentní*. V každém případě značíme $A \sim B$.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Tvrzení 1.3.1. *Ekvivalence matic je relace ekvivalence na množině všech matic stejného typu nad stejným polem.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

1.3.2. Schodovitý, Gaussův–Jordanův a Gaussův kanonický tvar matic

Připomeňme si definice z podkapitoly 1.1.

Definice 1.3.3. Matice je ve *schodovitém tvaru*, jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního řádku, začíná zleva více nulami než řádek předchozí.

Z toho plyne, že v matici ve schodovitém tvaru všechny řádky pod nulovým řádkem jsou nulové.

Definice 1.3.4. Matice je v *Gaussově–Jordanově tvaru*, jestliže

- (i) je ve schodovitém tvaru,
- (ii) v každém nenulovém řádku první (zleva) nenulový prvek je 1,
- (iii) v každém sloupcu, ve kterém je první nenulový prvek nějakého řádku, ostatní prvky jsou 0.

Definice 1.3.5. *Gaussův kanonický tvar* matice je

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková matice a 0 označuje nulové matice příslušných typů.

Příklad. (1) Necht

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A není ve schodovitém tvaru. Matice B je ve schodovitém tvaru, ale není v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice C je v Gaussově–Jordanově tvaru.

(2) Každá nulová matice je ve schodovitém tvaru i v Gaussově–Jordanově tvaru. Nulová matice je v Gaussově kanonickém tvaru právě tehdy, když je čtvercová. $\square$

Definice 1.3.6. Mějme nenulovou matici. *Gaussova eliminace* je úprava matice podle následujícího algoritmu.

Buď $i = 1$.

- (1) Uvažujme první nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i -tém nebo nižším řádku.
- (2) Není-li v i -tém řádku uvažovaného sloupku nenulový prvek, vyměníme i -tý řádek s vhodným nižším řádkem.
- (3) V uvažovaném sloupku vynulujeme prvky v řádcích pod i -tým řádkem přičtením vhodných násobků i -tého řádku.
- (4) Vezměme i o 1 větší ($i := i + 1$). Existuje-li nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i -tém nebo nižším řádku, vraťme se do bodu (1). Jestliže takový sloupek neexistuje, algoritmus končí.

Tvrzení 1.3.2. Každá matice je řádkově ekvivalentní matici ve schodovitém tvaru.

Důkaz. Nulová matice je ve schodovitém tvaru. Libovolnou nenulovou matici upravíme pomocí Gaussovy eliminace. Všechny provedené úpravy jsou řádkové elementární úpravy a z postupu při Gaussově eliminaci vyplývá, že každý nenulový řádek, kromě prvního řádku, začíná více nulami než řádek předchozí. $\square$

Z Tvrzení 1.5.2 a 1.5.3 vyplývá, že počet nenulových řádků v matici získané Gaussovou eliminací je určen jednoznačně, nezávisí na tom, jak byla Gaussova eliminace použita, přesněji, k jaké výměně řádků došlo v bodě (2).

Definice 1.3.7. Sloupek matice je *bázový*, jestliže není nulový a není lineární kombinací předchozích sloupků.

Bázové sloupky matice jsou právě ty sloupky, které jsou uvažovány v bodě (1) v Gaussově eliminaci.

Pozice (indexy) bázových sloupků v matici jsou maticí určeny jednoznačně.

Definice 1.3.8. Mějme nenulovou matici. *Gaussova–Jordanova eliminace* je úprava matice podle následujícího algoritmu.

Buď $i = 1$.

- (1) Uvažujme první nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i -tém nebo nižším řádku.
- (2) Není-li v i -tém řádku uvažovaného sloupku nenulový prvek, vyměníme i -tý řádek s vhodným nižším řádkem.
- (3) i -tý řádek vynásobíme převrácenou hodnotou jeho prvního nenulového prvku.
- (4) V uvažovaném sloupku vynulujeme prvky mimo i -tý řádek přičtením vhodných násobků i -tého řádku.
- (5) Vezměme i o 1 větší ($i := i + 1$). Existuje-li nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i -tém nebo nižším řádku, vraťme se do bodu (1). Jestliže takový sloupek neexistuje, algoritmus končí.

Gaussovu–Jordanovu eliminaci je možné ekvivalentně definovat i tak, že matici upravíme pomocí Gaussovy eliminace (na schodovitý tvar), každý nenulový řádek vynásobíme převrácenou hodnotou jeho prvního nenulového prvku a vynulujeme všechny prvky nad všemi prvními nenulovými prvky řádků.

Tvrzení 1.3.3. Každá matice je řádkově ekvivalentní matici v Gaussově–Jordanově tvaru.

Důkaz. Nulová matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. Libovolnou nenulovou matici upravíme pomocí Gaussovy–Jordanovy eliminace. Všechny provedené úpravy jsou řádkové elementární úpravy a z postupu při Gaussově–Jordanově eliminaci vyplývá, že výsledná matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. $\square$

Maticí je jednoznačně určena řádkově ekvivalentní matice v Gaussově–Jordanově tvaru, tedy pro každou matici existuje právě jedna matice v Gaussově–Jordanově tvaru řádkově ekvivalentní původní matici.

Tvrzení 1.3.4. Každá nenulová matice je ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru.

Důkaz. S použitím řádkových i sloupkových elementárních úprav a vhodnou úpravou Gaussovy–Jordanovy eliminace získáme algoritmus, který převádí libovolnou nenulovou matici na ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru. Podrobnosti ponecháme jako cvičení. $\square$

1.3.3. Elementární matice

Definice 1.3.9. *Elementární matice* jsou:

(1) pro $i \neq j$

$$E^{i,j}(c) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & c & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ j\text{-tý řádek} \\ \\ \end{matrix}$$

(2) pro $c \neq 0$

$$E^i(c) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & c & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} i\text{-tý řádek}$$

(3) pro $i \neq j$

$$E^{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ j\text{-tý řádek} \\ \\ \end{matrix}$$

Každá elementární matice vznikne z jednotkové matice provedením vhodné řádkové nebo sloupkové elementární úpravy.

Matice $E^{i,j}(c)$ vznikne z jednotkové matice E přičtením c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku a od jednotkové matice se liší jen tím, že $(E^{i,j}(c))_j^i = c$, zatímco $E_j^i = 0$.

Matice $E^i(c)$ vznikne z jednotkové matice E vynásobením i -tého řádku prvkem c a od jednotkové matice se liší jen tím, že $(E^i(c))_i^i = c$, zatímco $E_i^i = 1$.

Matice $E^{i,j}$ vznikne z jednotkové matice E výměnou i -tého řádku a j -tého řádku a od jednotkové matice liší jen tím, že i -tý a j -tý řádky jsou vzájemně vyměněny.

Lemma 1.3.5. *Budte A, B matice.*

- (1) *Matice B může vzniknout z matice A pomocí jedné řádkové elementární úpravy právě tehdy, když existuje elementární matice Q taková, že $B = QA$.*
- (2) *Matice B může vzniknout z matice A pomocí jedné sloupkové elementární úpravy právě tehdy, když existuje elementární matice Q taková, že $B = AQ$.*

Důkaz. Přímým výpočtem lze ověřit, že přičtení c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku je totéž co vynásobení maticí $E^{i,j}(c)$ zleva, vynásobení i -tého řádku prvkem $c \in P$ je totéž co vynásobení maticí $E^i(c)$ zleva a výměna i -tého řádku a j -tého řádku je totéž co vynásobení maticí $E^{i,j}$ zleva. Viz také komentář za Definicí 1.2.4 součinu matic. Analogicky pro sloupkové úpravy a násobení zprava. Cvičení. $\square$

Příklad. Buďte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$B_1 = E^{1,3}(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot A_{\circ}^1 + 2 \cdot A_{\circ}^3 \\ A_{\circ}^2 \\ A_{\circ}^3 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = E^3(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\circ}^1 \\ A_{\circ}^2 \\ 2 \cdot A_{\circ}^3 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = E^{1,3} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\circ}^3 \\ A_{\circ}^2 \\ A_{\circ}^1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Lemma 1.3.6. *Transponované matice k elementárním maticím jsou elementární matice.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

1.4. Inverzní matice

Definice 1.4.1. Buď A čtvercová matice. Matice X je *inverzní* k matici A , je-li stejného typu a platí

$$AX = XA = E.$$

Inverzní matice k matici A se značí A^{-1} . Matice je *invertibilní*, existuje-li matice k ní inverzní.

Příklad. (1) Každá jednotková matice E je invertibilní a $E^{-1} = E$.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je invertibilní, protože } A \cdot A = E, \text{ a tedy } A^{-1} = A.$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ není invertibilní, protože pro libovolnou matici } X \text{ typu } 2 \times 2 \text{ } AX \text{ má druhý řádek nulový a není to tedy jednotková matice.}$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ není invertibilní, protože pro libovolnou matici } X \text{ typu } 2 \times 2 \text{ } XA \text{ má první sloupek nulový a není to tedy jednotková matice.}$$

(5) Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že X je inverzní k A . Pak $AX = E$, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostaneme rovnosti

$$a - c = 1, \quad b - d = 0, \quad a - c = 0, \quad b - d = 1.$$

Ze třetí rovnosti máme $a = c$ a po dosazení do první rovnosti máme $0 = 1$, což je spor. Z toho vyplývá, že neexistuje matice X taková, že $AX = E$, a matice A tedy není invertibilní.

(6) Žádná nulová matice není invertibilní.

(7) Elementární matice jsou invertibilní a přímým výpočtem lze ověřit (cvičení), že

$$(E^{i,j}(c))^{-1} = E^{i,j}(-c), \quad (E^i(c))^{-1} = E^i(c^{-1}), \quad (E^{i,j})^{-1} = E^{i,j}. \quad \square$$

Tvrzení 1.4.1. *Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.*

Důkaz. Předpokládejme, že X' , X'' jsou inverzní matice k matici A . Tedy $AX' = X'A = AX'' = X''A = E$. Potom $X' = EX' = X''AX' = X''E = X''$. $\square$

Tvrzení 1.4.2. *Nechť $A, A_1, \dots, A_n$ jsou invertibilní matice stejného typu. Potom*

- (1) $A_1 \cdot \dots \cdot A_n$ je invertibilní a $(A_1 \cdot \dots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}$;
- (2) A^{-1} je invertibilní a $(A^{-1})^{-1} = A$;
- (3) A^T je invertibilní a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Důkaz. (1) $(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) \cdot (A_n^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}) = E = (A_n^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot \dots \cdot A_n)$ a podle definice inverzní matice tedy $(A_1 \cdot \dots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}$.

(2) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ a podle definice inverzní matice tedy $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, tedy $E = E^T = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T$ a $E = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$ a podle definice inverzní matice $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. $\square$

Tvrzení 1.4.3. *Nechť A, B jsou čtvercové matice takové, že $AB = E$. Pak $BA = E$, obě matice A, B jsou invertibilní a jsou vzájemně inverzní ($A = B^{-1}$ a $B = A^{-1}$).*

Důkaz. Matici A upravme řádkovými elementárními úpravami na Gaussův–Jordanův tvar G , tedy $G = Q_k \dots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou elementární matice příslušné provedeným úpravám. Pak $A = Q_1^{-1} \dots Q_k^{-1} G$ a $AB = Q_1^{-1} \dots Q_k^{-1} GB = E$. Matice G nemá nulový řádek, protože jinak by matice GB také měla nulový řádek a takovou matici nelze pomocí řádkových elementárních úprav (v tomto případě reprezentovaných maticemi $Q_1^{-1}, \dots, Q_k^{-1}$) převést na jednotkovou matici (cvičení). Jelikož G je v Gaussově–Jordanově tvaru a nemá nulový řádek, $G = E$. Pak $A = Q_1^{-1} \dots Q_k^{-1}$ je invertibilní matice jakožto součin invertibilních matic a existuje tedy A^{-1} .

Potom $BA = EBA = A^{-1}ABA = A^{-1}EA = A^{-1}A = E$. Jelikož $AB = BA = E$, jsou obě matice A, B invertibilní a jsou vzájemně inverzní. $\square$

Nyní zformulujeme důležité kritérium invertibility.

Tvrzení 1.4.4. *Matice je invertibilní právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Nechť A je invertibilní matice. Řádkovými elementárními úpravami ji převedeme na Gaussův–Jordanův tvar G , tedy $G = Q_k \dots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou elementární matice příslušné provedeným úpravám. Každá z matic $Q_1, \dots, Q_k, A$ je invertibilní a jejich součin G je také invertibilní. Potom G , jakožto invertibilní matice nemá nulový řádek a $G = E$, jelikož G je v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice A je tedy řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

„ $\Leftarrow$ “ Předpokládejme, že matice A je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí E , tedy $Q_k \dots Q_1 A = E$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou vhodné elementární matice. Označme si $Q = Q_k \dots Q_2 Q_1$, tedy $QA = E$. Podle Tvrzení 1.4.3 je A invertibilní a $A^{-1} = Q$. $\square$