

9.4. Souřadnice

Tvrzení 9.4.1. *Bud' $(e_1, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru V . Pak pro každé $v \in V$ existuje právě jedna n -tice skalárů $(x^1, \dots, x^n)$ taková, že $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$.*

Důkaz. Bud' $v \in V$. Jelikož $e_1, \dots, e_n$ generují V , existují $x^1, \dots, x^n \in P$ takové, že $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Jsou-li $y^1, \dots, y^n$ libovolná taková, že $v = y^1 e_1 + \dots + y^n e_n$, pak

$$\begin{aligned} 0 &= v - v = (x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) - (y^1 e_1 + \dots + y^n e_n) = \\ &= (x^1 - y^1) e_1 + \dots + (x^n - y^n) e_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ plyne $x^1 - y^1 = \dots = x^n - y^n = 0$, a tedy $x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n$. $\square$

Cvičení. Zformulujte a dokažte obrácené tvrzení. $\square$

Definice 9.4.1. Skaláry $x^1, \dots, x^n$ z předchozího tvrzení jsou *souřadnice* vektoru v vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Souřadnice budeme zapisovat buď jako prvky pole $x^1, \dots, x^n$ nebo jako uspořádanou n -tici $x = (x^1, \dots, x^n)$ nebo jako matici typu $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Příklad. (1) Souřadnice vektoru $2 \in \mathbb{R}$ vzhledem k bázi (6) je $\frac{1}{3}$, protože $2 = \frac{1}{3} \cdot 6$.

(2) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ v kanonické bázi jsou x, y, z , protože $(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$.

(3) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ v bázi $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ jsou $x - y, y - z, z$, protože $(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1)$.

(4) Souřadnice vektoru $z = a + bi \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ vzhledem k bázi $(1, i)$ jsou a, b , protože $z = a \cdot 1 + b \cdot i$.

Souřadnice vektoru $z = a + bi \in \mathbb{C}(\mathbb{C})$ vzhledem k bázi (1) je z , protože $z = z \cdot 1$. $\square$

Souřadnice vektoru závisí na volbě báze. Jeden vektor má v různých bázích různé souřadnice.

Bud' V vektorový prostor, $v \in V$. Bud' $e = (e_1, \dots, e_n)$ a $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ báze V , e nazvěme *stará báze*, e' nazvěme *nová báze*. Souřadnice vektoru v vzhledem ke staré bázi označme $x = (x^1, \dots, x^n)$ a řekněme jim *staré souřadnice*. Souřadnice vektoru v vzhledem k nové bázi označme $x' = (x'^1, \dots, x'^n)$ a řekněme jim *nové souřadnice*. Platí tedy $v = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$.

Definice 9.4.2. Matice, jejíž sloupky jsou tvořeny novými souřadnicemi starých bázevých vektorů, je *matice přechodu* od staré báze k nové bázi.

Matici přechodu od báze α k bázi β značíme $Q_{\alpha\beta}$.

Zobrazení

$$\delta(i, j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{je-li } i = j, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{je Kroneckerovo delta.}$$

Tvrzení 9.4.2. *Matice přechodu je regulární.*

Důkaz. Buďte $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ a $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ báze jednoho vektorového prostoru. Označme $Q_{\alpha\beta} = (a_i^j)$ matici přechodu od báze α k bázi β a $Q_{\beta\alpha} = (b_i^j)$ matici přechodu od báze β k bázi α . Tedy, $(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n)$ jsou souřadnice vektoru α_i vzhledem k bázi β , $(b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^n)$ jsou souřadnice vektoru β_i vzhledem k bázi α a

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \beta_j \quad \text{a} \quad \beta_i = \sum_{j=1}^n b_i^j \alpha_j \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, n.$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{j=1}^n a_i^j \beta_j = \\ &= \sum_{j=1}^n a_i^j \left(\sum_{k=1}^n b_j^k \alpha_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i^j b_j^k \right) \alpha_k, \end{aligned}$$

čili

$$\left(\sum_{j=1}^n a_i^j b_j^1, \quad \sum_{j=1}^n a_i^j b_j^2, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^n a_i^j b_j^n \right)$$

jsou souřadnice vektoru α_i vzhledem k bázi α . Tedy,

$$\sum_{j=1}^n a_i^j b_j^k = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = k, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ovšem

$$\sum_{j=1}^n a_i^j b_j^k = (Q_{\beta\alpha} Q_{\alpha\beta})_i^k$$

je v k -tém řádku a i -tém sloupku součinu $Q_{\beta\alpha} Q_{\alpha\beta}$, takže $Q_{\beta\alpha} Q_{\alpha\beta} = E$, proto matice $Q_{\beta\alpha}$ a $Q_{\alpha\beta}$ jsou vzájemně inverzní a tedy obě regulární. $\square$

Tvrzení 9.4.3. *Buď $Q_{ee'}$ matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' a buďte x a x' staré a nové souřadnice jednoho vektoru. Potom*

$$x' = Q_{ee'} \cdot x.$$

Důkaz. Buď $Q_{ee'} = (q_j^i)$ matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' . Tedy

$$e_i = \sum_j q_i^j e'_j.$$

Buď $v = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n \in V$. Potom

$$\begin{aligned} v &= x^1 \sum_j q_1^j e'_j + \cdots + x^n \sum_j q_n^j e'_j = \\ &= x^1 (q_1^1 e'_1 + q_1^2 e'_2 + \cdots + q_1^n e'_n) + \cdots + x^n (q_n^1 e'_1 + q_n^2 e'_2 + \cdots + q_n^n e'_n) = \\ &= \left(\sum_j q_j^1 x^j \right) e'_1 + \left(\sum_j q_j^2 x^j \right) e'_2 + \cdots + \left(\sum_j q_j^n x^j \right) e'_n. \end{aligned}$$

Tedy

$$x'^i = \sum_j q_j^i x^j \quad \text{a} \quad x' = Q_{ee'} \cdot x. \quad \square$$

Příklad. (1) Mějme $\mathbb{R}$, starou bázi $e = (6)$ a novou bázi $e' = (1)$. Pro $v = 2$ je $x = (\frac{1}{3})$ a $x' = (2)$.

Matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' je

$$Q_{ee'} = (6).$$

A skutečně

$$x' = (6) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = (2).$$

(2) Mějme $\mathbb{R}^2$, starou bázi $e = ((1, -1), (1, 1))$ a novou bázi $e' = ((0, 2), (2, 1))$. Pro $v = (2, 0)$ je $x = (1, 1)$ a $x' = (-\frac{1}{2}, 1)$.

Matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' je

$$Q_{ee'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$x' = Q_{ee'} \cdot x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Tvrzení 9.4.4. Buďte V vektorový prostor nad polem P , $e = (e_1, \dots, e_n)$ jeho báze, $u, v \in V$, $p \in P$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ souřadnice vektoru u a $y = (y^1, \dots, y^n)$ souřadnice vektoru v . Pak $x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$ jsou souřadnice vektoru $u + v$ a $px = (px^1, \dots, px^n)$ jsou souřadnice vektoru pu .

Důkaz. Cvičení. $\square$

9.5. Orientace vektorového prostoru

Definice 9.5.1. Buďte α, β báze jednoho vektorového prostoru. Báze α má stejnou orientaci jako báze β , jestliže $\det Q_{\alpha\beta} > 0$.

Relace

$$\alpha \sim \beta \quad \text{právě tehdy, když} \quad \alpha \text{ má stejnou orientaci jako } \beta$$

je relace ekvivalence. (Cvičení.) Tato relace ekvivalence rozděluje množinu všech bází jednoho vektorového prostoru do dvou disjunktních tříd.

Definice 9.5.2. Prohlásíme-li některou z bází vektorového prostoru, a společně s ní i každou bázi se stejnou orientací, za *kladnou* (nebo *kladně orientovanou*), určíme tím *orientaci* vektorového prostoru a vektorový prostor je potom *orientovaný*. Báze, které nejsou kladné, jsou *záporné* (nebo *záporně orientované*).

Příklad. Kanonická báze prostoru P^n je obvykle uvažována jako kladná. $\square$

9.6. Přímý součet vektorových prostorů

Definice 9.6.1. Buďte $V_1, \dots, V_n$ vektorové prostory nad polem P . Na kartézském součinu $V_1 \times \dots \times V_n$ zavedme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),$$

$$p(u_1, \dots, u_n) = (pu_1, \dots, pu_n)$$

pro libovolné $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$ a $p \in P$.

Na $V_1 \times \dots \times V_n$ tak dostaneme strukturu vektorového prostoru nad polem P , který se značí $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ a je to *přímý součet* vektorových prostorů $V_1, \dots, V_n$.

Cvičení. Ověřte, že $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ je vektorový prostor. $\square$

Tvrzení 9.6.1. Buďte $V_1, \dots, V_n$ konečněrozměrné vektorové prostory. Pak

$$\dim(V_1 \oplus \dots \oplus V_n) = \dim V_1 + \dots + \dim V_n.$$

Důkaz. Pro každé i nechť $(e_1^i, \dots, e_{m_i}^i)$ je báze V_i . Potom

$$((e_1^1, 0, \dots, 0), \dots, (e_{m_1}^1, 0, \dots, 0),$$

$$(0, e_1^2, 0, \dots, 0), \dots, (0, e_{m_2}^2, 0, \dots, 0),$$

$$\dots,$$

$$(0, \dots, 0, e_1^n), \dots, (0, \dots, 0, e_{m_n}^n))$$

je báze $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ (cvičení). $\square$

Příklad. Buď $V_1 = \mathbb{R}$ a $V_2 = \mathbb{R}^2$. Potom $V_1 \times V_2$ je množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ uspořádaných dvojic (x, y) , kde $x \in \mathbb{R}$ a $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tedy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \{(x, (y_1, y_2)) \mid x \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\}$.
Například

$$(1, (2, 3)) + (2, (1, -1)) = (1 + 2, (2, 3) + (1, -1)) = (3, (3, 2)),$$

$$3 \cdot (2, (1, 4)) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (1, 4)) = (6, (3, 12)).$$

Buď $e^1 = (1)$ báze $\mathbb{R}$ a buď $e^2 = (e_1^2, e_2^2) = ((1, 0), (0, 1))$ báze $\mathbb{R}^2$. Potom trojice

$$((e^1, 0), (0, e_1^2), (0, e_2^2)) = ((1, (0, 0)), (0, (1, 0)), (0, (0, 1)))$$

je báze $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ a $\dim(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2) = 3 = \dim \mathbb{R} + \dim \mathbb{R}^2 = 1 + 2$. $\square$