

9.2. Lineární kombinace, generátory, lineární nezávislost

Buď V vektorový prostor nad polem P .

Definice 9.2.1. Buďte $n \in \mathbb{N}$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ a $p^1, p^2, \dots, p^n \in P$. *Lineární kombinace* vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n$ s koeficienty $p^1, p^2, \dots, p^n$ je vektor

$$p^1 v_1 + p^2 v_2 + \dots + p^n v_n \in V.$$

Lineární kombinace prázdné množiny je nulový vektor $0 \in V$.

Příklad. (1) Součet vektorů u, v je jejich lineární kombinace s koeficienty 1, 1. Opačný vektor k v je jeho lineární kombinace (skalární násobek) s koeficientem -1 :

$$u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v, \quad -v = (-1) \cdot v.$$

(2) Lineární kombinace vektorů $1, 6 \in \mathbb{R}$ s koeficienty $3, 1 \in \mathbb{R}$ je $3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 9$.

(3) Lineární kombinace vektorů $(1, 2, 0), (2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ s koeficienty $-3, 2 \in \mathbb{R}$ je

$$(-3) \cdot (1, 2, 0) + 2 \cdot (2, 3, 1) = (1, 0, 2).$$

□

Definice 9.2.2. Buď $U \subseteq V$. *Lineární obal* množiny U je množina $\llbracket U \rrbracket$ všech lineárních kombinací konečně mnoha vektorů množiny U . Pro $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ je

$$\llbracket U \rrbracket = \llbracket u_1, u_2, \dots, u_n \rrbracket = \{p^1 u_1 + p^2 u_2 + \dots + p^n u_n \mid p^1, p^2, \dots, p^n \in P\}.$$

Lineární obal prázdné množiny je $\llbracket \emptyset \rrbracket = \{0\} \subset V$.

Definice 9.2.3. Množina $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ *generuje* V , je-li každý vektor $v \in V$ lineární kombinací vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n$, to jest, jestliže pro každý vektor $v \in V$ existují skaláry $p^1, p^2, \dots, p^n \in P$ takové, že $v = p^1 v_1 + p^2 v_2 + \dots + p^n v_n$, to jest, jestliže $\llbracket v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket = V$.

V takovém případě také $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je *množina generátorů* prostoru V nebo vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ *generují* V nebo V je *generován* vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Příklad. (1) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Skutečně, libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty x, y, z :

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1).$$

(2) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$. Skutečně, libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty $x - y, y - z, z$:

$$(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1).$$

(3) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (3, 4, 5)$. Libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty $x, y, z, 0$:

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1) + 0 \cdot (3, 4, 5).$$

V tomto případě můžeme najít dokonce nekonečně mnoho vyjádření ve tvaru lineární kombinace, pro libovolný parametr $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(x, y, z) = (x - 3t) \cdot (1, 0, 0) + (y - 4t) \cdot (0, 1, 0) + (z - 5t) \cdot (0, 0, 1) + t \cdot (3, 4, 5).$$

(4) Prostor $\mathbb{R}^3$ není generován vektory $(1, 2, 0), (3, 4, 0), (5, 6, 0)$. Ověřte.

(5) Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, kde $v_i = (v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^m)$, generují $\mathbb{R}^m$, jestliže soustava

$$\begin{aligned} v_1^1 x^1 + v_2^1 x^2 + \dots + v_n^1 x^n &= v^1 \\ v_1^2 x^1 + v_2^2 x^2 + \dots + v_n^2 x^n &= v^2 \\ &\vdots \\ v_1^m x^1 + v_2^m x^2 + \dots + v_n^m x^n &= v^m \end{aligned}$$

o neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$ má řešení pro každou pravou stranu $v^1, v^2, \dots, v^m$. Soustava je totiž ekvivalentní s podmínkou

$$x^1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ \vdots \\ v_n^1 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ \vdots \\ v_n^2 \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}.$$

(6) Prostor $\mathbb{R}_2[x]$ polynomů neurčité x s reálnými koeficienty stupně nejvýše 2 je generován vektory $x^2, x+1, 1$. Ověřte. $\square$

Definice 9.2.4. Prostor, který má konečnou množinu generátorů, je *konečněrozměrný*.

Příklad. Vektorový prostor $\mathbb{R}[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty není konečněrozměrný. Pro libovolné $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}[x]$ existuje přirozené číslo m , které je větší než stupeň kteréhokoliv z polynomů $p_1, \dots, p_n$. Pak polynom $x^m \in \mathbb{R}[x]$ není lineární kombinací polynomů $p_1, \dots, p_n$, takže polynomy $p_1, \dots, p_n$ negenerují $\mathbb{R}[x]$. $\square$

Cvičení. (1) Jestliže $v_1, \dots, v_n$ generují V a v_i je lineární kombinací ostatních, pak $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ také generují V . Dokažte.

(2) Nechť každý z vektorů $v_1, \dots, v_n$ je lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_m \in V$. Jestliže $v_1, \dots, v_n$ generují V , pak $u_1, \dots, u_m$ také generují V . Dokažte. $\square$

Definice 9.2.5. (1) Množina vektorů $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ je *lineárně nezávislá*, jestliže z rovnosti

$$x^1 v_1 + x^2 v_2 + \dots + x^n v_n = 0, \text{ kde } x^1, x^2, \dots, x^n \in P,$$

plyne $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$.

(2) Množina vektorů $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Často se zjednodušeně a nepřesně říká, že nějaké vektory jsou lineárně (ne)závislé. Myslí se tím, že příslušná množina vektorů je lineárně (ne)závislá.

Příklad. (1) Množina $\{7\} \subset \mathbb{R}$ je lineárně nezávislá. Je-li $x \cdot 7 = 0$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, pak $x = 0$ (pro nenulové x uvedená rovnost $x \cdot 7 = 0$ neplatí).

(2) Množina $\{2, 3\} \subset \mathbb{R}$ je lineárně závislá. Lineární kombinace $x^1 \cdot 2 + x^2 \cdot 3$ může být rovna 0, i když je některý z koeficientů x^1, x^2 nenulový, například $x^1 = 3, x^2 = -2$.

(3) Množina $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně nezávislá. Lineární kombinace $x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$ je vektor (x, y, z) , který je roven $(0, 0, 0)$ právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

(4) Množina $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně nezávislá. Lineární kombinace $x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1)$ je vektor $(x + y + z, y + z, z)$, který je roven $(0, 0, 0)$ právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

(5) Množina $\{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (2, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně závislá. Lineární kombinace $x \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, 2) + z \cdot (2, 1, 0)$ je vektor $(x + 2z, y + z, -x + 2y)$, který je roven $(0, 0, 0)$ i pro nenulové koeficienty x, y, z , například $x = 2, y = 1, z = -1$. Ověřte.

(6) Libovolná množina vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislá. Lineární kombinace $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot 0$ je nulový vektor a přitom aspoň jeden koeficient je nenulový.

(7) Množina $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$, kde $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^m)$, je lineárně nezávislá právě tehdy, když soustava

$$\begin{aligned} v_1^1 x^1 + v_2^1 x^2 + \dots + v_n^1 x^n &= 0 \\ v_1^2 x^1 + v_2^2 x^2 + \dots + v_n^2 x^n &= 0 \\ &\vdots \\ v_1^m x^1 + v_2^m x^2 + \dots + v_n^m x^n &= 0 \end{aligned}$$

má právě jedno řešení, a to sice $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$.

(8) Množina $\{x^2, x, 1\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ je lineárně nezávislá. Ověřte.

(9) Prázdná množina je lineárně nezávislá, protože všechny koeficienty z prázdné množiny koeficientů jsou nulové. $\square$

Cvičení. (1) Libovolná podmnožina lineárně nezávislé množiny vektorů je lineárně nezávislá. Dokažte.

(2) Jednoprvková množina $\{v\} \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když $v \neq 0$. Dokažte. $\square$

Tvrzení 9.2.1. Množina vektorů $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních, tj. právě když existuje index i takový, že vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Předpokládejme, že množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá, tedy že existují koeficienty $a^1, \dots, a^n$ takové, že $a^1 v_1 + \dots + a^i v_i + \dots + a^n v_n = 0$ a aspoň jeden z nich je nenulový (například a^i). Potom

$$v_i = -\frac{a^1}{a^i} v_1 - \dots - \frac{a^{i-1}}{a^i} v_{i-1} - \frac{a^{i+1}}{a^i} v_{i+1} - \dots - \frac{a^n}{a^i} v_n,$$

a vektor v_i je tedy lineární kombinací ostatních.

„ $\Leftarrow$ “ Nechť vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$, tedy existují koeficienty $a^1, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^n$ takové, že

$$v_i = a^1 v_1 + \dots + a^{i-1} v_{i-1} + a^{i+1} v_{i+1} + \dots + a^n v_n.$$

Potom

$$a^1 v_1 + \dots + a^{i-1} v_{i-1} - v_i + a^{i+1} v_{i+1} + \dots + a^n v_n = 0$$

s nenulovým koeficientem (-1) u vektoru v_i . Tedy, množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá. $\square$

Tvrzení 9.2.2. Množina vektorů $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací předchozích, tj. právě když existuje index i takový, že vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}$.

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Postupujeme jako v důkazu předchozího tvrzení, jen nenulový koeficient a^i vybereme s nejvyšším možným indexem. To znamená, že $a^{i+1} = \dots = a^n = 0$ a zbytek je zřejmý.

Jako cvičení rozeberte podrobně případ $i = 1$, kdy bude množina předcházejících vektorů prázdná.

„ $\Leftarrow$ “ Tvrzení je speciálním případem předchozího. □

Definice 9.2.6. *Elementární úprava n -tice vektorů $(v_1, \dots, v_n)$ je:*

- (i) vynásobení vektoru nenulovým skalárem c ;
- (ii) přičtení c -násobku j -tého vektoru k i -tému vektoru, kde $i \neq j$;
- (iii) výměna i -tého vektoru s j -tým vektorem.

Při tom vznikají po řadě n -tice

$$\begin{aligned} &(v_1, \dots, v_{i-1}, cv_i, v_{i+1}, \dots, v_n), \\ &(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + cv_j, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_n), \\ &(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Ke každé z těchto úprav existuje úprava inverzní, která je rovněž elementární a stejného typu (ověřte).

Definice 9.2.7. Dvě n -tice vektorů jsou *ekvivalentní*, jestliže jedna vznikne z druhé konečnou posloupností elementárních úprav.

Cvičení. Ukažte, že právě zavedená relace mezi n -ticemi vektorů je reflexivní, symetrická a tranzitivní. □

Příklad. Mějme matici typu $m \times n$ nad polem P . Její řádky jsou uspořádané n -tice prvků pole P , tj. vektory z prostoru P^n . Celá matice je pak m -tice takových n -tic, tedy m -tici vektorů z prostoru P^n . Elementární úpravy této m -tice vektorů jsou právě elementární řádkové úpravy dané matice. □