9. přednáška, 22. 4. 2024

14.10. Vlastnosti ortogonálního doplňku

Tvrzení 14.10.1. *Nechť V je prostor se skalárním součinem a U jeho konečněrozměrný podprostor. Pak*

(1) $U^{\perp\perp} = U$,
(2) $V = U \dot{+} U^{\perp}$,
(3) je-li V konečněrozměrný, potom $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$.

Důkaz. (1) Každý vektor z U je kolmý na $U^{\perp}$, takže $U \subseteq U^{\perp\perp}$. Buď $v \in U^{\perp\perp}$. Tedy v je kolmý na každý vektor z $U^{\perp}$, speciálně i $v \perp (v - v_U)$. Podprostor U je konečněrozměrný, takže existuje v_U. Podle definice ortogonální projekce také $v_U \perp (v - v_U)$. Z toho dostaneme

$$\|v - v_U\|^2 = (v - v_U, v - v_U) = (v, v - v_U) - (v_U, v - v_U) = 0 - 0 = 0,$$

proto $v = v_U$. Jelikož $v_U \in U$, máme $U^{\perp\perp} \subseteq U$ a celkově $U^{\perp\perp} = U$.

(2) Opět, podprostor U je konečněrozměrný, takže ke každému vektoru $v \in V$ existuje jeho ortogonální projekce do U. Platí $v_U \in U$, $(v - v_U) \perp U$, čili $v - v_U \in U^{\perp}$, a $v = v_U + (v - v_U)$. Takže $V = U + U^{\perp}$. Jelikož U a $U^{\perp}$ jsou vzájemně kolmé, v jejich průniku je jen nulový vektor. Z toho vyplývá, že $V = U \dot{+} U^{\perp}$.

(3) Z předchozího bodu a Tvrzení 10.3.2 dostaneme $\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$. □

Tvrzení 14.10.2. *Nechť V je prostor se skalárním součinem, U_1, U_2 jeho konečněrozměrné podprostory. Potom*

$$(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} + U_2^{\perp} = (U_1 \cap U_2)^{\perp}.$$

Důkaz.

$$U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2 \quad \Rightarrow \quad (U_1 + U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp}, U_2^{\perp} \quad \Rightarrow \quad (U_1 + U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$$
$$U_1 \cap U_2 \subseteq U_1, U_2 \quad \Rightarrow \quad U_1^{\perp}, U_2^{\perp} \subseteq (U_1 \cap U_2)^{\perp} \quad \Rightarrow \quad U_1^{\perp} + U_2^{\perp} \subseteq (U_1 \cap U_2)^{\perp}$$

V právě dokázaných vztazích místo U_1, U_2 použijeme $U_1^{\perp}, U_2^{\perp}$ a dostaneme

$$(U_1^{\perp} + U_2^{\perp})^{\perp} \subseteq U_1^{\perp\perp} \cap U_2^{\perp\perp} = U_1 \cap U_2 \quad \Rightarrow \quad (U_1 \cap U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$$
$$U_1 + U_2 = U_1^{\perp\perp} + U_2^{\perp\perp} \subseteq (U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp})^{\perp} \quad \Rightarrow \quad U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq (U_1 + U_2)^{\perp}$$

Nakonec, zřejmě

$$U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} + U_2^{\perp}.$$ □

Cvičení. Najděte V, U_1, U_2 takové, že $(U_1 \cap U_2)^{\perp} \not\subseteq U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$. □

14.11. Shodnosti—ortogonální a unitární transformace a matice

14.11.1. Shodnosti—ortogonální a unitární transformace

Shodnost je lineární transformace, která zachovává skalární součin.

Definice 14.11.1. Buď V prostor se skalárním součinem. Lineární transformace $f\colon V \to V$ je *shodnost*, jestliže pro každé $u, v \in V$

$$(f(u), f(v)) = (u, v).$$

V eukleidovském případě se shodnost nazývá také *ortogonální transformace*, v hermiteovském případě se shodnost nazývá také *unitární transformace*.

Tvrzení 14.11.1. *Buď f lineární transformace vektorového prostoru V se skalárním součinem. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) f je shodnost;
(2) f zachovává délky vektorů, tj. $\|f(v)\| = \|v\|$ pro každé $v \in V$;
(3) f zobrazuje jednotkové vektory na jednotkové vektory;
(4) f zachovává ortonormalitu, tj. $f(U)$ je ortonormální množina pro každou ortonormální množinu U.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Je-li f shodnost, pro každé $v \in V$

$$\|f(v)\|^2 = (f(v), f(v)) = (v, v) = \|v\|^2.$$

Takže $\|f(v)\| = \|v\|$, protože délka vektoru je nezáporné reálné číslo.
(2) $\Rightarrow$ (1) Předpokládejme, že f zachovává délky vektorů. Potom

$$\begin{aligned}
\operatorname{re}(f(u), f(v)) &= && \text{(Lemma 14.1.2)}\\
&= \tfrac{1}{2}(\|f(u) + f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && \text{(linearita } f\text{)}\\
&= \tfrac{1}{2}(\|f(u + v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && (f \text{ zachovává délky})\\
&= \tfrac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = && \text{(Lemma 14.1.2)}\\
&= \operatorname{re}(u, v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(f(u), f(v)) &= && \text{(Lemma 14.1.2)}\\
&= \tfrac{1}{2}(\|f(u) + \mathrm{i}f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && \text{(linearita } f\text{)}\\
&= \tfrac{1}{2}(\|f(u + \mathrm{i}v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) = && (f \text{ zachovává délky})\\
&= \tfrac{1}{2}(\|u + \mathrm{i}v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = && \text{(Lemma 14.1.2)}\\
&= \operatorname{im}(u, v).
\end{aligned}$$

Tedy,

$$(f(u), f(v)) = (u, v).$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Zřejmé.
(3) $\Rightarrow$ (2) Nechť f zobrazuje jednotkové vektory na jednotkové vektory. Jelikož $f(0) = 0$, $\|f(0)\| = \|0\|$. Buď $v \in V$, $v \neq 0$. Potom $\|v\| \neq 0$ a

$$\begin{aligned}
\|f(v)\| &= \left\| f\left(\tfrac{\|v\|}{\|v\|} v\right) \right\| = && (f \text{ je lineární})\\
&= \left\| \|v\| f\left(\tfrac{v}{\|v\|}\right) \right\| = && \text{(Lemma 14.1.1)}\\
&= \|v\| \left\| f\left(\tfrac{v}{\|v\|}\right) \right\| = && \left(\left\| \tfrac{v}{\|v\|} \right\| = 1 \Rightarrow \left\| f\left(\tfrac{v}{\|v\|}\right) \right\| = 1 \right)\\
&= \|v\|.
\end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (4) Nechť f je shodnost. Buď U ortonormální množina. Potom pro $f(u), f(v) \in f(U)$, $f(u) \neq f(v)$, platí

$$(f(u), f(v)) = (u, v) = 0 \quad \text{a} \quad \|f(u)\| = \|u\| = 1.$$

Čili, $f(U)$ je ortonormální množina.
(4) $\Rightarrow$ (3) Zřejmé. □

Tvrzení 14.11.2. *Buď V vektorový prostor se skalárním součinem, $(e_1, \ldots, e_n)$ jeho ortonormální báze a f jeho lineární transformace. Pak f je shodnost právě tehdy, když $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ je ortonormální báze V.*

Důkaz. Implikace "$\Rightarrow$" je snadné cvičení.

Nechť $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ je ortonormální báze. Buďte $u, v \in V$, $u = \sum x^i e_i$, $v = \sum y^i e_i$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ a $y = (y^1, \dots, y^n)$. Potom $f(u) = \sum x^i f(e_i)$, $f(v) = \sum y^i f(e_i)$ a podle Tvrzení 14.5.2

$$(u, v) = x^{\mathsf{T}} \overline{y} = (f(u), f(v)).$$ □

Tvrzení 14.11.3. *Každá shodnost konečněrozměrného vektorového prostoru se skalárním součinem je izomorfismus.*

Důkaz. Shodnost je lineární zobrazení. Je tedy potřeba dokázat již jen bijektivnost. Buď $u \in \operatorname{Ker} f$, tedy $f(u) = 0$. Potom $\|u\| = \|f(u)\| = 0$ a $u = 0$. Takže, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ a f je injektivní.

Dále $\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f = \dim V$, proto $\operatorname{Im} f = V$ a f je surjektivní. □

Tvrzení 14.11.4. *Složení shodností je shodnost.*

Důkaz. Cvičení. □

14.11.2. Ortogonální a unitární matice

Definice 14.11.2. Čtvercová matice A nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) typu $n \times n$ je *ortogonální* (resp. *unitární*), jestliže $(Au, Av) = (u, v)$ pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), kde $(\ ,\ )$ je standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Připomeňme značení: Pro matici $A = (A^i_j)$ označujeme $\overline{A} = \left(\overline{A^i_j}\right)$.

Tvrzení 14.11.5. *Buď A čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) typu $n \times n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) A je ortogonální (resp. unitární);
(2) množina sloupků matice A je ortonormální v $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}$) se standardním skalárním součinem;
(3) $A^{\mathsf{T}} A = E$ (resp. $\overline{A}^{\mathsf{T}} A = E$);
(4) $A A^{\mathsf{T}} = E$ (resp. $A \overline{A}^{\mathsf{T}} = E$);
(5) množina řádků matice A je ortonormální v $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}$) se standardním skalárním součinem;
(6) A^{T} je ortogonální (resp. unitární).

Důkaz. Jen pro reálný případ.

(1) $\Rightarrow$ (2) Buď $(e_1, \dots, e_n)$ kanonická báze $\mathbb{R}^n$. Potom $Ae_i = A^\circ_i$ je i-tý sloupek matice A a platí

$$(A^\circ_i, A^\circ_j) = (Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j) = \delta^j_i,$$

takže množina sloupků matice A je ortonormální.

(2) $\Leftrightarrow$ (3)

$$(A^{\mathsf{T}} A)^i_j = \sum_{k=1}^{n} (A^{\mathsf{T}})^i_k A^k_j = \sum_{k=1}^{n} A^k_i A^k_j = (A^\circ_i, A^\circ_j).$$

(3) $\Rightarrow$ (1) Jestliže $A^{\mathsf{T}} A = E$, potom pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$(Au, Av) = (Au)^{\mathsf{T}} (Av) = u^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} A v = u^{\mathsf{T}} E v = u^{\mathsf{T}} v = (u, v).$$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Jestliže $A^{\mathsf{T}} A = E$, potom $A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$ a $A A^{\mathsf{T}} = A A^{-1} = E$. Obdobně druhá implikace.

(4) $\Leftrightarrow$ (5)

$$(AA^{\mathsf{T}})^i_j = \sum_{k=1}^{n} A^i_k (A^{\mathsf{T}})^k_j = \sum_{k=1}^{n} A^i_k A^j_k = (A^i_\circ, A^j_\circ).$$

(4) $\Rightarrow$ (6) Jestliže $AA^{\mathsf{T}} = E$, potom pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$(A^{\mathsf{T}}u, A^{\mathsf{T}}v) = (A^{\mathsf{T}}u)^{\mathsf{T}}(A^{\mathsf{T}}v) = u^{\mathsf{T}}AA^{\mathsf{T}}v = u^{\mathsf{T}}Ev = u^{\mathsf{T}}v = (u, v).$$

(6) $\Rightarrow$ (5) Buď $(e_1, \dots, e_n)$ kanonická báze $\mathbb{R}^n$. Potom $A^{\mathsf{T}}e_i = (A^{\mathsf{T}})^\circ_i = A^i_\circ$ je i-tý řádek matice A a platí

$$(A^i_\circ, A^j_\circ) = (A^{\mathsf{T}}e_i, A^{\mathsf{T}}e_j) = (e_i, e_j) = \delta^j_i,$$

takže množina řádků matice A je ortonormální. □

Důsledek. *Je-li A ortogonální (resp. unitární) matice, pak je regulární a $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$ (resp. $A^{-1} = \overline{A}^{\mathsf{T}}$).*

Důkaz. Je-li A ortogonální (resp. unitární) matice, pak podle Tvrzení 14.11.5 $A^{\mathsf{T}}A = E$ (resp. $\overline{A}^{\mathsf{T}}A = E$), takže $A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$ (resp. $\overline{A}^{\mathsf{T}} = A^{-1}$). □

Tvrzení 14.11.6. *Je-li A ortogonální (resp. unitární) matice, pak* $\det A = \pm 1$ *(resp.* $|\det A| = 1$*).*

Důkaz.

$$1 = \det E = \det(\overline{A}^{\mathsf{T}}A) = \det \overline{A}^{\mathsf{T}} \det A = \overline{\det A} \det A = |\det A|^2$$

Je-li $\det A \in \mathbb{R}$, potom $\det A = \pm 1$. □

Cvičení. Dokažte, že $\det \overline{A}^{\mathsf{T}} = \overline{\det A}$. □

Tvrzení 14.11.7. *Součin ortogonálních (resp. unitárních) matic je ortogonální (resp. unitární) matice.*

Důkaz. Buďte A, B ortogonální (resp. unitární) matice, čili $A^{\mathsf{T}}A = E$ a $B^{\mathsf{T}}B = E$ (resp. $\overline{A}^{\mathsf{T}}A = E$ a $\overline{B}^{\mathsf{T}}B = E$). Potom

$$(AB)^{\mathsf{T}}AB = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}AB = B^{\mathsf{T}}B = E \quad (\text{resp. } \overline{AB}^{\mathsf{T}}AB = \overline{B}^{\mathsf{T}}\overline{A}^{\mathsf{T}}AB = \overline{B}^{\mathsf{T}}B = E).$$ □

14.11.3. Ortogonální transformace a ortogonální matice

Tvrzení 14.11.8. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace eukleidovského vektorového prostoru V, buď A její matice vzhledem k ortonormální bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Pak f je shodnost právě tehdy, když je matice A ortogonální.*

Důkaz. Sloupce A°_j matice A jsou souřadnice vektorů $f(e_i)$ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$, čili

$$f(e_i) = \sum_k A^k_i e_k.$$

$(e_1, \dots, e_n)$ je ortonormální, takže $(e_i, e_j) = \delta^j_i$.

f je shodnost právě tehdy, když $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ je ortonormální báze, a to je právě tehdy, když

$$\delta^j_i = (f(e_i), f(e_j)),$$

ale

$$\begin{aligned}(f(e_i), f(e_j)) &= (\sum_k A_i^k e_k, \sum_l A_j^l e_l)\\ &= \sum_k \sum_l A_i^k A_j^l (e_k, e_l)\\ &= \sum_k \sum_l A_i^k A_j^l \delta_k^l\\ &= \sum_k A_i^k A_j^k\\ &= \sum_k (A^\mathsf{T})_k^i A_j^k\\ &= (A^\mathsf{T} A)_j^i,\end{aligned}$$

čili $A^\mathsf{T} A$ je jednotková matice. □

14.11.4. Matice přechodu mezi ortonormálními bázemi

Tvrzení 14.11.9. *Matice přechodu od ortonormální báze k ortonormální bázi prostoru se skalárním součinem je ortogonální (resp. unitární).*

Důkaz. Buď V je prostor se skalárním součinem, $e = (e_1, \dots, e_n)$ a $f = (f_1, \dots, f_n)$ jeho ortonormální báze, Q matice přechodu od báze e k bázi f. Podle Tvrzení 14.5.1

$$e_i = \sum_{k=1}^n (e_i, f_k) f_k, \quad \text{čili} \quad Q_i^k = (e_i, f_k).$$

Potom

$$(\overline{Q}^\mathsf{T} Q)_j^i = \sum_{k=1}^n (\overline{Q}^\mathsf{T})_k^i Q_j^k = \sum_{k=1}^n \overline{Q}_i^k Q_j^k = \sum_{k=1}^n \overline{(e_i, f_k)} (e_j, f_k) = \sum_{k=1}^n (e_j, (e_i, f_k) f_k) =$$
$$= (e_j, \sum_{k=1}^n (e_i, f_k) f_k) = (e_j, e_i) = \delta_j^i,$$

takže

$$\overline{Q}^\mathsf{T} Q = E \quad \text{a matice } Q \text{ je ortogonální (resp. unitární).}$$ □

Důsledek. *Buď Q matice přechodu od ortonormální báze k ortonormální bázi eukleidovského prostoru. Potom*

$$\det Q = \begin{cases} 1, & \textit{jestliže uvedené báze mají stejnou orientaci,}\\ -1, & \textit{jestliže uvedené báze nemají stejnou orientaci.}\end{cases}$$

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Tvrzení 14.11.9 a 14.11.6. □